

Vorlesungsskript

35-405

**Zeitdiskrete Systeme
und
stochastische Signale**

Prof. Dr. J. L. Massey

Institut für Signal- und
Informationsverarbeitung
ETH Zürich

7. Auflage

Vorwort zur 7. Auflage

Dies ist die siebte Auflage des Skripts zur Vorlesung "Zeitdiskrete Systeme und stochastische Signale". Sie unterscheidet sich nur unwesentlich von der 6. Auflage: Der zuvor separat verteilte Anhang E befindet sich im vorliegenden Skript, ferner wurden weitere Druckfehler ausgemerzt.

Sollten noch irgendwelche Fehler im Skript auftreten, so sind wir sehr dankbar, wenn wir darauf aufmerksam gemacht werden.

Für die ISI-Assistenz:

Qun Gao

September 1998

Dieses Skript wurde verwendet für eine Vorlesung von Prof. Dr. James L. Massey während der Jahre 1992 bis 1998 an der ETH Zürich.

Die Urheberrechte liegen beim Autor. Der vorliegende Abdruck ist nur zum Eigengebrauch bestimmt. Jede weitere Verwendung oder Abdruck (auch nur auszugsweise) bedingt das Einverständnis des Autors.

The copyright lies with the author. This copy is only for personal use. Any reproduction, publication or further distribution requires the agreement of the author.

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Deterministische zeitdiskrete Signale	1
1.1. Einführung.....	1
1.2. Zeitkontinuierliche Signale.....	2
1.3. Zeitdiskrete Signale.....	3
1.4. Klassifizierung von zeitdiskreten Signalen.....	5

Kapitel 2

Stochastische zeitdiskrete Signale	7
2.1. Einführung.....	7
2.2. Wahrscheinlichkeitssysteme.....	8
2.3. Zufallsgrösse	13
2.4. Zufallsvektoren und Erwartungswert.....	18
2.5. Stochastische Prozesse	21

Kapitel 3

Die z-Transformation.....	23
3.1. Einführung.....	23
3.2. Potenzreihen und Laurentreihen.....	24
3.3. Die z-Transformation.....	29
3.4. Einige nützliche allgemeine Eigenschaften der z-Transformation.....	32
3.5. Einige z-Transformations-Eigenschaften rechtsseitiger und kausaler Signale.....	36

Kapitel 4

Lineare zeitdiskrete Systeme	39
4.1. Definition eines linearen zeitdiskreten Systems	39
4.2. Kronecker-Delta-Antwort und Faltung	40
4.3. Kausalität und Stabilität	41
4.4. Übertragungsfunktion und Faltung.....	44

Kapitel 5

Stochastische Signale in linearen zeitdiskreten Systemen.....	47
5.1. Einführung.....	47
5.2. Stationäre und schwach stationäre stochastische Prozesse	48
5.3. Antwort eines LDS auf ein schwach stationäres stochastisches Signal	50
5.4. Die Bedeutung der z-Transformation auf dem Einheitskreis.....	53
5.5. Die Wiener-Khinchine Relation.....	54

Kapitel 6

Abtastung.....	57
6.1. Einführung.....	57
6.2. Das Abtasttheorem.....	58
6.3. Diskussion des Abtasttheorems.....	61

Kapitel 7

Lineare minimale mittlere quadratische Fehlerschätzung und Filterung.....	69
7.1. Einführung.....	69
7.2. Vorbereitende Überlegungen	70
7.3. Das Orthogonalitätsprinzip.....	72
7.4. Zwei nützliche Eigenschaften des linearen minimalen mittleren quadratischen Fehler-Schätzwertes	75
7.5. Wiener Filterung.....	77
7.5.1. FIR Wiener Filter.....	77
7.5.2. Nichtkausales Wiener Filter	79
7.5.3. Kausales Wiener Filter.....	80

Kapitel 8

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingter Erwartungswert	89
8.1 Einführung.....	89
8.2 Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmass.....	89
8.3 "Totale Wahrscheinlichkeit" und Bayes'sche Regel.....	92
8.4 Bedingte Dichten und Erwartungswerte.....	93
8.5 Werte von Zufallsgrößen als Bedingungen.....	95

Kapitel 9

Entscheidungstheorie	99
9.1 Einführung.....	99
9.2 Die MAP-Entscheidungsregel	100
9.3 Die Maximum-Likelihood Entscheidungsregel.....	101
9.4 Die Bayes'sche Entscheidungsregel.....	102
9.5 Maximum-Likelihood Entscheidungen und der Viterbi-Algorithmus	104

Kapitel 10

Schätzungstheorie.....	113
10.1 Einführung.....	113
10.2 Bayes'sche Schätzung.....	114
10.3 MAP Schätzung.....	117
10.4 Maximum-Likelihood Schätzung.....	118

Anhang A

Über verallgemeinerte Funktionen und den Dirac-Stoss.....	119
--	------------

Anhang B

Partialbruchzerlegung.....	129
-----------------------------------	------------

Anhang C

C.1. Eigenschaften der z-Transformation.....	135
C.2. Die wichtigsten z-Transformationspaare.....	136

Anhang D

Wörterbuch Deutsch-Englisch	137
--	------------

Anhang E

Beweis des Cauchy-Hadamard Theorems über die Konvergenz von Potenzreihen (Kapitel 3).....	139
--	------------

Kapitel 1

Deterministische zeitdiskrete Signale

1.1. Einführung

Die letzten vier Jahrzehnte waren Zeuge eines dramatischen Wechsels von der analogen zur digitalen Technologie, so dass unser Zeitalter als "digitales Zeitalter" bezeichnet werden kann. Der Grund liegt nicht darin, dass die Signale, die wir zum Mitteilen von Information oder zum Übermitteln von Energie benutzen, grundsätzlich digitaler Natur sind. Im Gegenteil, diese Signale sind grundsätzlich analoger Natur. Es ist die *Einfachheit der Verarbeitung* digitaler Signale, welche die digitale Technologie an die Spitze in praktisch allen Ingenieurdisziplinen gebracht hat.

Eine heute übliche Lösung in der Signalverarbeitung ist die möglichst rasche Umwandlung analoger Eingangssignale in digitale Signale, um dann diese digitalen Signale in raffinierter Art zu verarbeiten, bevor das digitale Ausgangssignal in das gewünschte analoge Endsignal umgewandelt wird. Einige Systeme sind vollständig digital – wenigstens auf den ersten Blick; eine genauere Untersuchung zeigt im allgemeinen, dass es sich um analoge Wellenformen handelt, die sich als digitale Signale "maskieren", und dass "analoge" elektronische Schaltungen die "digitale Verarbeitung" verrichten. Es ist richtig zu behaupten, dass digitale Signale und digitale Prozessoren nur Annäherungen an gewisse Arten von analogen Signalen und analogen Prozessoren sind. Was den digitalen Standpunkt so wertvoll macht, ist, dass die Annäherung im allgemeinen so gut ist, dass man gefahrlos die zugrundeliegenden analogen Signale und deren Verarbeitung vergessen und sich mit den viel einfacheren digitalen Größen befassen kann.

Wir haben bis jetzt noch nicht genau erklärt, was wir mit "analogen Signalen" und "digitalen Signalen" meinen. Es ist nur eine kleine Ungenauigkeit (die wir später korrigieren werden) zu sagen, dass analoge Signale zeitkontinuierliche Signale sind, währenddessen digitale Signale zeitdiskrete Signale sind. Unser Interesse wollen wir in dieser Vorlesung primär den digitalen Signalen, genauer den zeitdiskreten Signalen widmen. Aber bevor wir eine mathematische Formulierung dieser Signale geben, ist es ratsam, einen kurzen Rückblick auf analoge Signale oder genauer zeitkontinuierliche Signale zu geben.

1.2. Zeitkontinuierliche Signale

Wir können viel über zeitkontinuierliche Signale lernen, wenn wir eines der einfachsten dieser Signale, den Sinus, gezeigt in Figur 1.2.1, betrachten.

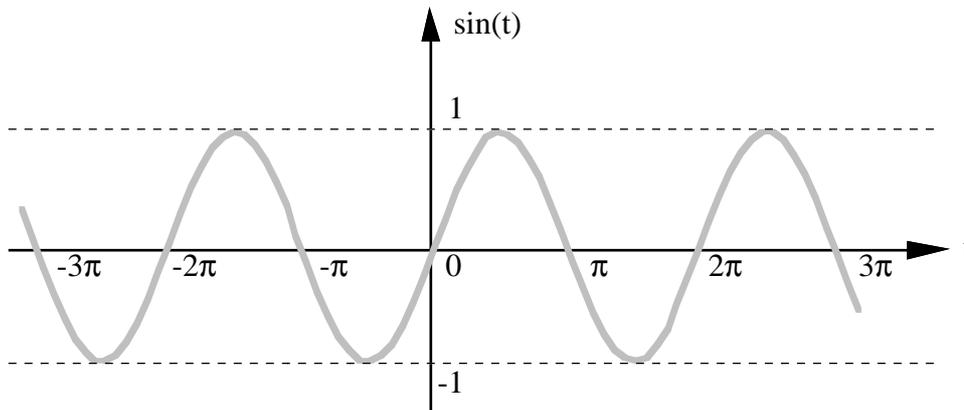


Fig. 1.2.1: Ein zeitkontinuierliches Signal: Die Sinusfunktion.

Was für eine Art mathematisches Objekt ist ein zeitkontinuierliches Signal wie die Sinusfunktion? Die Antwort ist offensichtlich, wenn wir Figur 1.2.1 betrachten. Ein *zeitkontinuierliches Signal* ist eine **Funktion**, deren *Definitionsbereich* die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist. Wir nennen diesen Definitionsbereich \mathbb{R} oft die "Zeitachse", da wir uns jede reelle Zahl \mathbb{R} als Zeit auf einer Uhr denken können. Um genauer zu sein, müssen wir hinzufügen, dass ein *reelles zeitkontinuierliches Signal* (wie der Sinus) eine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{R} ist, deren *Bildbereich* ebenfalls die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist.

Ein *komplexes zeitkontinuierliches Signal* ist entsprechend eine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{R} , deren Bildbereich die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} ist.

Wir sehen in Figur 1.2.1, dass der Sinus eine Funktion ist, welche eigentlich nur Werte einer kleinen Teilmenge des Bildbereichs annimmt, nämlich alle im Intervall $\{r: -1 \leq r \leq +1\}$ liegenden reellen Zahlen. Dieser Bereich ist der *Wertebereich* der Funktion.

Wir führen nun eine einfache Notation ein, die man braucht, um präzise über zeitkontinuierliche Signale (oder irgend eine andere Art von Funktion) zu sprechen. Man schreibt

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

was bedeutet, dass f eine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{R} und Bildbereich \mathbb{C} ist, das heißt, dass f ein komplexes zeitkontinuierliches Signal ist. Wir schreiben $f(t)$, um den Wert dieser Funktion zur Zeit t in \mathbb{R} zu kennzeichnen. [Die Tatsache, dass f jedem Punkt des Definitionsbereichs einen einzelnen Wert des Bildbereichs zuweist, ist genau das, was f zu einer *Funktion* macht.] Es ist wichtig zu vermerken, dass f der *Name der Funktion* ist. Oft schreiben wir eher $f(\cdot)$ anstelle von f als Name der Funktion, um uns daran zu erinnern, dass wir es eigentlich mit einer Funktion zu tun haben, aber wir sollten nie den Funktionsnamen

als $f(t)$ schreiben, da $f(t)$ der Wert der Funktion $f(\cdot)$ an einem einzelnen Punkt ist. Schliesslich schreibt man $f(\mathbb{R})$, um den Wertebereich der Funktion zu bezeichnen, das heisst

$$f(\mathbb{R}) = \{r: \text{Es existiert mindestens ein } t \text{ in } \mathbb{R}, \text{ f\"ur welches } f(t) = r \text{ ist}\}.$$

Als eine Übung in Terminologie und Notation betrachten wir wieder den Sinus aus Figur 1.2.1. Dieses reelle zeitkontinuierliche Signal ist die Funktion

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

die zur Zeit t den Wert $\sin(t)$ annimmt. Der Wertebereich der Funktion ist die Menge

$$\sin(\mathbb{R}) = \{r: -1 \leq r \leq +1\}.$$

Diese Funktion \sin [oder $\sin(\cdot)$] sollte nie die "Funktion" $\sin(t)$ genannt werden, obwohl der Leser gewiss schon oft diesen häufigen Missbrauch der Terminologie erfahren hat.

1.3. Zeitdiskrete Signale

Wir kehren nun die Strategie vom vorherigen Abschnitt um, indem wir zuerst die mathematische Definition eines zeitdiskreten Signals geben und nachher erörtern, warum diese Definition die praktisch geeignete ist.

Ein reelles zeitdiskretes Signal ist eine Funktion

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen ist $\{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$. Entsprechend ist ein komplexes zeitdiskretes Signal eine Funktion

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Um uns daran zu erinnern, dass wir es mit einem zeitdiskreten Signal zu tun haben (Definitionsbereich = \mathbb{Z}) und nicht mit einem zeitkontinuierlichen Signal (Definitionsbereich = \mathbb{R}), werden wir immer den Wert des zeitdiskreten Signals f zur Zeit k in \mathbb{Z} als $f[k]$ und nicht als $f(k)$ schreiben, aber die Form der Klammern hat keine tiefere Bedeutung. Entsprechend sprechen wir oft von der zeitdiskreten Funktion $f[\cdot]$ und nicht $f(\cdot)$, wieder nur als Gedankenstütze.

Eine erste Frage ist, wie man ein zeitdiskretes Signal graphisch darstellen soll, da wir ja nicht einfach eine Achse, bestehend aus ausschliesslich ganzzahligen Werten, zeichnen können. Wir übernehmen die Lösung, die in Figur 1.3.1 für die zeitdiskrete Einheitsschrittfunktion $u[\cdot]$ gezeigt wird.

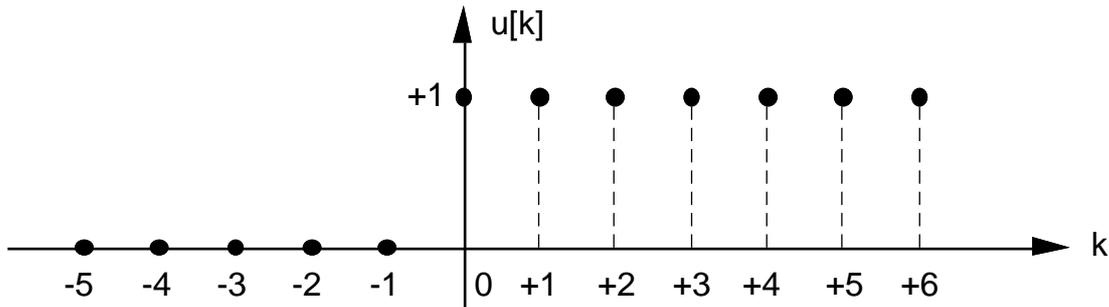


Fig. 1.3.1: Die zeitdiskrete Einheitsschrittfunktion.

Wie Figur 1.3.1 zeigt, zeichnen wir die "Zeitachse", als ob sie aus der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} bestünde, aber wir zeigen nur für die Teilmenge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} einen Funktionswert, weil die ganzen Zahlen den Definitionsbereich der Funktion darstellen. Die zeitdiskrete Einheitsschrittfunktion in Figur 1.3.1 ist ein zeitdiskretes Signal $u[\cdot]$ so, dass

$$u[k] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ eine nichtnegative ganze Zahl ist,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ eine negative ganze Zahl ist.} \end{cases}$$

Beachte, dass $u[\mathbb{Z}] = \{0, 1\}$, das heisst, dass der Wertebereich von $u[\cdot]$ eine Menge ist, die nur aus den zwei reellen Zahlen 0 und 1 besteht.

Wir widmen uns jetzt der Frage, warum die obige Definition geeignet ist, um allgemeine zeitdiskrete Funktionen zu definieren. Schränken wir uns nicht zu stark ein, wenn wir eine Uhr haben, die nur in ganzzahligen Schritten vorangeht? Die Antwort lautet nein – denn wir können uns vorstellen, dass die Zeit k eine *normalisierte Zeit* ist. Wir könnten auch, und werden öfters, die normalisierte Zeit k mit der "wahren Zeit" in Verbindung bringen:

$$t_k = k \Delta \text{ [Sekunden]}, \quad (1.3.1)$$

wobei Δ eine passende Konstante ist. Zum Beispiel, wenn wir $\Delta = 10^{-6}$ s wählen, dann ist $t_k = k \cdot 10^{-6}$ s, so, dass unsere wahre Zeit in Schritten von einer Mikrosekunde voranschreitet. Es ist viel bequemer, immer die normalisierte Zeit zu verwenden, als Funktionen verwenden zu müssen, deren Definitionsbereich $\{\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots\}$ im allgemeinen für jede Anwendung anders spezifiziert werden muss. Eigentlich müssen wir unsere normalisierte Zeit nicht einmal so einschränken, dass sie Schritten festgelegter Grösse auf einer wahren Uhr wie in (1.3.1) entspricht. Es genügt schon, die normalisierte Zeit k mit der wahren Uhrzeit t_k in Verbindung zu bringen, wobei

$$t_k < t_{k+1}, \text{ alle } k \text{ in } \mathbb{Z},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = -\infty$$

gilt, und tatsächlich ist eine solche "Staccato-Uhr" manchmal von Vorteil in praktischen Problemen.

1.4. Klassifizierung von zeitdiskreten Signalen

Gewisse Arten von zeitdiskreten Signalen spielen eine besonders wichtige Rolle in Ingenieur-Anwendungen. Die "rechtsseitigen" Signale sind besonders wichtig. Das zeitdiskrete Signal $f[.]$ ist *rechtsseitig*, wenn eine ganze Zahl b existiert, so dass $f[k] = 0$ für alle ganzen Zahlen $k < b$. Das Signal $f[.] = u[. + 1]$, gezeigt in Figur 1.4.1, ist ein rechtsseitiges Signal, jede ganze Zahl b kleiner als 0 ist eine passende Wahl, so dass $f[k] = 0$ für alle $k < b$ ist.

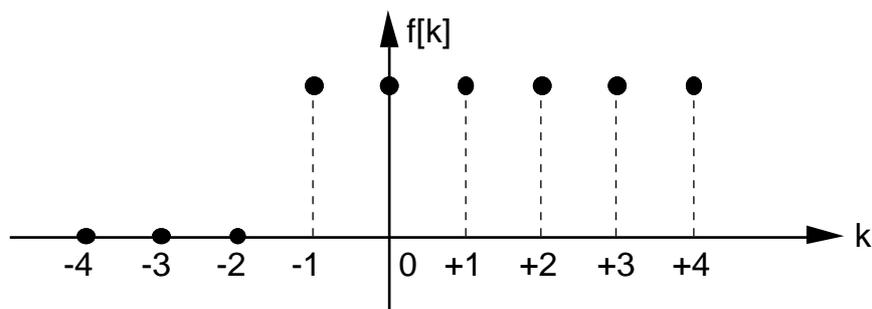


Fig. 1.4.1: Beispiel eines rechtsseitigen Signals.

Das zeitdiskrete Signal $f[.]$ wird *kausal* genannt, wenn $f[k] = 0$ für alle ganzen Zahlen $k < 0$ ist. Die Einheitsschrittfunktion $u[.]$ ist kausal, wie man sofort in Figur 1.3.1 sieht. Ein kausales Signal ist automatisch auch ein rechtsseitiges Signal (wir können in der Definition eines rechtsseitigen Signals $b = 0$ wählen), aber nicht umgekehrt. Das Signal $f[.] = u[. + 1]$ von Figur 1.4.1 ist rechtsseitig, aber *nicht* kausal, da $f[-1] = u[0] = 1$ ist. Es ist unsere Pflicht, hier darauf hinzuweisen dass man ein *Signal* eigentlich nicht "kausal" nennen sollte, da Kausalität eher eine Eigenschaft eines *Systems* als eines *Signals* ist. Jedoch, wie wir bald sehen werden, gibt es einen so engen Zusammenhang zwischen kausalen linearen zeitdiskreten Systemen und kausalen Signalen (wie gerade definiert), dass es gerechtfertigt scheint, den geringfügigen Missbrauch der Terminologie, den man macht, wenn man ein Signal "kausal" nennt, zu akzeptieren. Dringender ist es, den Leser zu warnen, dass viele Autoren keine Unterscheidung zwischen "rechtsseitigen Signalen" und "kausalen Signalen" machen; solche Autoren würden nicht gelten lassen, das Signal in Figur 1.4.1 ein "rechtsseitiges Signal" zu nennen, wie wir es getan haben und tun werden.

Das zeitdiskrete Signal $f[.]$ ist *linksseitig*, wenn es eine ganze Zahl b gibt, so dass $f[k] = 0$ für alle $k > b$ in \mathbb{Z} gilt. Gleichbedeutend ist $f[.]$ linksseitig, wenn seine *Zeitumkehrung* $f[-.]$ rechtsseitig ist.

Der Leser sollte nun leicht verstehen, dass ein zeitdiskretes Signal genau dann sowohl rechtsseitig als auch linksseitig ist, wenn es höchstens endlich viele ganze Zahlen k gibt, so dass $f[k] \neq 0$ ist. Die *Kronecker-Delta-Funktion* $\delta[.]$, definiert durch

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k \text{ eine ganze Zahl } \neq 0 \text{ ist,} \end{cases}$$

ist sowohl rechtsseitig als auch linksseitig; ausserdem sind diese Funktion und ihre Zeitumkehrung $\delta[-\cdot]$ beide kausal. Tatsächlich sind die Signale der Form $f[\cdot] = c\delta[\cdot]$, wobei c eine reelle (oder komplexe) Zahl ist, die einzigen *kausalen* zeitdiskreten Signale, deren Zeitumkehrungen auch kausal sind.

Kapitel 2

Stochastische zeitdiskrete Signale

2.1. Einführung

Der Leser wird bemerkt haben, dass im vorherigen Kapitel über "deterministische zeitdiskrete Signale" das Wort "deterministisch" nur im Titel des Kapitels erschien. Der Grund dafür liegt darin, dass es schwierig zu sagen ist, was ein deterministisches Signal ist, solange man nicht auch stochastische Signale betrachtet hat.

Wir führen nun stochastische zeitdiskrete Signale in einer sehr unformalen Art ein, die als Motivation für die exakte Behandlung dienen soll, die später in diesem Kapitel folgen wird. Wir beginnen mit der Betrachtung der Box mit der Anschrift "Stochastische zeitdiskrete Signalquelle", die in Fig. 2.1.1 gezeigt ist. Das Adjektiv "*stochastisch*" bedeutet, dass es uns *a priori* unbekannt ist, was für ein bestimmtes zeitdiskretes Signal ausgesendet wird, obgleich wir vielleicht wissen, dass gewisse Ausgangssignale "wahrscheinlicher" sind als andere. Wir haben den Ausgang mit $X[.]$ bezeichnet, wobei wir hier die Vereinbarung einführen, die wir von nun an exakt einhalten werden: Wir benützen Grossbuchstaben, um eine "Zufallsgrösse" zu bezeichnen, und Kleinbuchstaben, um einen bestimmten "Wert" oder eine "Realisierung" dieser Grösse zu kennzeichnen.



Fig. 2.1.1: Eine stochastische Signalquelle.

Ein Beispiel ist eine stochastische zeitdiskrete Signalquelle, deren Ausgang $X[.]$ nur verzögerte Einheitsschrittfunktionen $u[.-L]$ für $L = 0, 1, 2, \dots$ als mögliche Realisierungen hat. Wenn wir den Ausgang dieser Quelle beobachten, können wir beispielsweise das zeitdiskrete Signal $u[.-5]$ sehen. Der Punkt, den wir uns merken sollten, ist, dass *wir eine und nur eine Realisierung von $X[.]$ sehen*. Hätten wir anstelle dieser stochastischen Quelle eine Vorrichtung, von der wir *a priori* wüssten, dass sie das Ausgangssignal $u[.-5]$ aussendet, dann würden wir sie als "*deterministisch*" bezeichnen. Eine bestimmte zeitdiskrete Funktion kann ebenso gut ein *deterministisches Signal* (oder, genauer, *der Ausgang einer deterministischen Quelle*) oder die Realisierung eines *stochastischen Signals* (*der Ausgang einer stochastischen Quelle*) sein. Die "interessanten" stochastischen Signale sind "Zufallserscheinungen" und sind von der Einheitsschrittfunktion oder von den anderen deterministischen Signalen, die wir normalerweise betrachten, ziemlich verschieden – aber das ist ein oberflächlicher Unterschied. *Der wesentliche Aspekt eines stochastischen Signals ist, dass es im allgemeinen viele mögliche Realisierungen hat, und man a priori nicht weiss, welche davon auftreten wird.*

Es sollte schon jetzt ersichtlich sein, dass eine genaue Behandlung der stochastischen Signale den Gebrauch der Wahrscheinlichkeitstheorie erfordert. Wir unterbrechen daher unser Studium der zeitdiskreten Signale, damit wir auf diejenigen Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie, die wir zur genauen Definition der stochastischen zeitdiskreten Signale brauchen, eingehen können.

2.2. Wahrscheinlichkeitssysteme

Ein *Wahrscheinlichkeitssystem* [probability space] ist ein Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) , wo Ω , der *Ergebnisraum* [sample space], eine nicht-leere Menge ist, und wo \mathcal{A} (*Klasse der Ereignisse* [class of events]) und P (*Wahrscheinlichkeitsmass* [probability measure]) eine Menge respektive eine Funktion sind, die gewissen Anforderungen, welche wir bald spezifizieren werden, gehorchen. Zuerst jedoch befassen wir uns mit der intuitiven Bedeutung des Ergebnisraums Ω . Als Zufallsexperiment bezeichnen wir intuitiv jede Art eines physischen Experiments, dessen Ergebnis bis zu einem gewissen Grade unvorhersehbar ist. Wenn wir zwei "unabhängige Versuche" dieses Experiments machen, werden die zwei Ergebnisse im allgemeinen verschieden sein. Der Ergebnisraum Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments. *Jedesmal wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, erhalten wir genau ein Ergebnis.* Das ist in Fig. 2.2.1 angegeben, wo wir das Ergebnis des Zufallsexperiments als Element ω der Menge Ω zeigen. In einem fundamentalen Sinne ist das Ergebnis ω eine *vollständige Beschreibung* dessen, was in einem bestimmten Versuch geschieht, darum kann ein und nur ein Ergebnis auftreten.

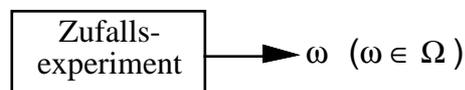


Fig. 2.2.1: Ein Zufallsexperiment.

Beispiel 2.1.1: Wir betrachten einen 3-Bit-Ringzähler, der mit 1 MHz getaktet wird. Der Zähler geht in dieser Reihenfolge periodisch durch die acht Zustände 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 und 111. Das Zufallsexperiment bestehe darin, einen Schalter niederzudrücken, welcher veranlasst, dass der Zähler beim aktuellen Zustand stoppt. Nun lesen wir den Stoppzustand ab. Da das Zufallsexperiment 8 mögliche Ergebnisse hat, können wir den Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ wählen, wobei ω_i das Ergebnis ist, dass der Stoppzustand die binäre Form der ganzen Zahl i ist. Dem Stoppzustand 110 beispielsweise entspricht das Ergebnis ω_6 .

Sehr oft interessieren wir uns nicht für die vollständige Beschreibung dessen, was passiert, wenn wir ein Zufallsexperiment durchführen, das heisst, wir sind am Ergebnis selber gar nicht interessiert, sondern nur an einer "groben" Beschreibung dessen, was passiert ist. Bei unserem 3-Bit-Zähler könnten wir zum Beispiel nur daran interessiert sein, ob das niedrigstwertige Bit des Stoppzustandes eine Null war (wir könnten mit einem Freund wetten, dass wir dieses Bit bei einer Null stoppen können). Der Begriff eines "Ereignisses" in der Wahrscheinlichkeitstheorie wird eingeführt, damit wir präzise über solche unvollständige Beschreibungen dessen, was passiert, wenn wir ein Zufallsexperiment durchführen, reden

können. Etwas ungenau können wir sagen, dass ein "Ereignis" eine Menge von Ergebnissen, das heißt eine Teilmenge von Ω , ist. In unserem 3-Bit-Zähler-Beispiel ist die Menge $\{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ das "Ereignis", dass das niedrigstwertige Bit des Stopzustands 0 ist, da es aus genau denjenigen Ergebnissen besteht, für welche dieses Bit Null ist. Wir würden sagen, dass dieses "Ereignis" immer dann eintritt, wenn das Ergebnis ω dieses Zufallsexperiments ein Ergebnis in diesem "Ereignis" ist.

Weil "Ereignisse" Teilmengen von Ω sind, sollte es nicht überraschen, dass wir oft Mengenoperationen wie Komplementierung [complementation], Vereinigung [union] und Schnittmenge [intersection] von "Ereignissen" gebrauchen wollen, um andere "Ereignisse" zu erzeugen. Es wäre sehr unangenehm, wenn wir ausgehend von "Ereignissen" durch das Ausführen solcher Operationen ein "Nicht-Ereignis" erreichen würden. Folglich müssen wir vorsichtig sein (besonders mit Ergebnisräumen mit un abzählbar-unendlich-vielen Elementen), welche Teilmengen von Ω wir als "Ereignisse" zulassen. Genau genommen müssen wir ein *Ereignis* als eine Teilmenge von Ω definieren, die in \mathcal{A} enthalten ist, wobei \mathcal{A} eine nicht-leere Klasse von Ereignissen ist, welche die folgenden zwei Axiome erfüllt:

- (i) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^c \in \mathcal{A}$ (wobei A^c das *Komplement* von A in Ω ist, das heißt, $A^c = \{\omega: \omega \in \Omega, \omega \notin A\}$).
- (ii) Wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, 2, 3, \dots$, dann ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Eine nicht-leere Klasse von Mengen, die diesen zwei Axiomen gehorcht, wird *Sigma-Algebra* genannt, folglich kann man einfach sagen, dass *die Klasse von Ereignissen eine Sigma-Algebra sein muss*.

Besonders das zweite Axiom mag ein wenig seltsam erscheinen, da es von zählbar unendlich vielen Ereignissen spricht, sogar wenn der Ergebnisraum endlich ist, wenn also nur endlich viele *verschiedene* Ereignisse möglich sind. Die Fremdartigkeit entsteht aus dem Wunsch nach Einsparung von Axiomen, der sich in der modernen Mathematik verbreitet. Axiom (ii) gilt auch für endlich viele Vereinigungen, da uns nichts daran hindert, die Wahl $A_2 = A_3 = A_4 = \dots$ zu treffen. Das ergibt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2.$$

Folglich bedeutet Axiom (ii) einer Sigma-Algebra, dass wenn $A_1 \in \mathcal{A}$ und $A_2 \in \mathcal{A}$ sind, dann ist auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. In Worten, wenn A_1 und A_2 Ereignisse sind, dann ist auch ihre Vereinigung ein Ereignis. Als nächstes erinnern wir uns an die Gesetze von de Morgan, die besagen, dass $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$, oder gleichbedeutend, dass $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c$ ist. Wenn A_1 und A_2 Ereignisse sind, besagt Axiom (i), dass A_1^c und A_2^c auch Ereignisse sind. Axiom (ii) besagt weiter, dass $A_1^c \cup A_2^c$ ein Ereignis ist, somit besagt Axiom (i) zusammen mit den Gesetzen von de Morgan, dass $A_1 \cap A_2$ auch ein Ereignis ist. Führt man diese Argumente ad infinitum weiter, so wird die folgende Behauptung bewiesen:

Charakterisierung einer Sigma-Algebra

Eine nichtleere Klasse \mathcal{A} von Teilmengen einer Menge Ω ist genau dann eine Sigma-Algebra, wenn endlich viele oder zählbar unendlich viele Mengenoperationen auf Elemente von \mathcal{A} Elemente von \mathcal{A} als Resultat ergeben.

Es kommt in Ingenieur-Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie höchst selten vor, dass man sich Sorgen machen muss, ob die Menge von Ereignissen wohldefiniert ist, das heisst, ob sie eine Sigma-Algebra bildet. Tatsächlich ist es schwierig, eine vernünftige Klasse von Ereignissen aufzustellen, die keine Sigma-Algebra ist. Zum Beispiel erlaubt man normalerweise in endlichen Ergebnisräumen, dass jede Teilmenge von Ω ein Ereignis ist, und diese "maximale" Wahl von \mathcal{A} ist trivialerweise eine Sigma-Algebra.

Zwei spezielle Ereignisse sind von grosser Bedeutung: Weil die Klasse von Ereignissen nicht leer ist, muss sie mindestens aus einem Ereignis A bestehen. Dann muss aber auch A^c ein Ereignis sein. Folglich muss auch $A \cup A^c = \Omega$ ein Ereignis sein. Der Ergebnisraum Ω ist selber immer ein Ereignis! Wir nennen Ω das *sichere Ereignis*, da es immer auftreten muss, das heisst, das Ergebnis ω des Zufallsexperiments muss in Ω sein. Weil Ω ein Ereignis ist, muss auch $\Omega^c = \emptyset$ ein Ereignis sein, das heisst, die leere Menge von Ergebnissen \emptyset ist immer ein Ereignis! Wir nennen \emptyset das *unmögliche Ereignis*, da es nie auftreten kann, das heisst, das Ergebnis ω des Zufallsexperiments kann nie in \emptyset sein.

Beispiel 2.1.2 (Fortsetzung von Beispiel 2.1.1): Wir wählen die Klasse \mathcal{A} so, dass sie jede Teilmenge von $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ als Element enthält. Beachte, dass es $2^8 = 256$ Ereignisse in \mathcal{A} gibt, da jedes der 8 Ergebnisse entweder zu einem bestimmten Ereignis gehört oder nicht. Das Ereignis $A = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ ist das Ereignis, dass das niedrigstwertige Bit des Stopzustands 0 ist. Das Ereignis $B = \{\omega_0\}$ ist das Ereignis, dass der Stopzustand 000 ist.

Wir haben schon erwähnt, dass man sagt, ein Ereignis tritt ein, wenn das Ergebnis ω des Zufallsexperiments ein Element des Ereignisses ist. *Wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, wird genau ein Ergebnis auftreten, aber es werden im allgemeinen mehrere Ereignisse eintreten*, nämlich alle Ereignisse, die dieses Ergebnis enthalten.

Wir kommen nun zum letzten der drei Bestandteile eines Wahrscheinlichkeitssystems, dem Wahrscheinlichkeitsmass P . Das *Wahrscheinlichkeitsmass* P ist eine Funktion

$$P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R},$$

die den drei Axiomen gehorcht, die der grosse russische Mathematiker Kolmogorov (1903 - 1987) als erster niedergeschrieben hat. Bevor wir diese Axiome darlegen, denken wir über die Tatsache nach, dass das Wahrscheinlichkeitsmass eine Funktion ist, deren Definitionsbereich die Klasse von Ereignissen \mathcal{A} ist. Wenn $A \in \mathcal{A}$ ist, werden wir $P[A]$ für den Wert der Funktion P mit dem Argument A schreiben. Weil die Gefahr, dass wir $P[A]$ mit dem "Wert eines zeitdiskreten Signals $P[\cdot]$ zur Zeit A " verwechseln, klein ist, werden wir eckige Klammern für die Funktion P brauchen, um hervorzuheben, dass *das Argument ein Ereignis*

ist. Wir nennen $P[A]$ die "Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ". Weil der Definitionsbereich von P die Klasse der Ereignisse ist, sehen wir:

Ereignisse und nur Ereignisse haben Wahrscheinlichkeiten !

Um ein gültiges Wahrscheinlichkeitsmass zu sein, muss eine Funktion $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ den folgenden Axiomen gehorchen:

Axiome von Kolmogorov:

- (i) Für jedes Ereignis A gilt: $0 \leq P[A] \leq 1$.
- (ii) $P[\Omega] = 1$.
- (iii) Wenn A_1, A_2, A_3, \dots Ereignisse sind, für die gilt

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \text{ dann ist } P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

Die übliche *intuitive* Interpretation ist, dass $P[A]$ der Bruchteil von Versuchen ist, für welche das Ereignis A eintritt, wenn wir sehr viele "unabhängige Versuche" des Zufallsexperiments machen würden; Kolmogorovs erstes Axiom unterstützt diese Interpretation, da ein solcher Bruch zwischen 0 und 1, inklusive, liegen muss. Kolmogorovs zweites Axiom unterstützt diese Interpretation ebenfalls, da der Bruchteil von Versuchen, für die das sichere Ereignis Ω eintritt, genau 1 sein muss.

Das dritte Axiom von Kolmogorov ist ein bisschen subtiler, da es, um Axiome einzusparen, nur mit Hilfe einer Folge von unendlich vielen Ereignissen formuliert ist. Als erstes halten wir fest, dass $A_1 = \Omega, A_2 = \emptyset = A_3 = A_4 = \dots$ eine gültige Wahl für die Folge von Ereignissen ist. Dann gilt aber

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \Omega.$$

Somit folgt aus Axiom (iii)

$$P[\Omega] = P[\Omega] + \sum_{i=2}^{\infty} P[\emptyset]$$

oder gleichbedeutend

$$\sum_{i=2}^{\infty} P[\emptyset] = 0.$$

Folglich haben wir bewiesen, dass Kolmogorovs Axiome (die nicht sehr überraschende Tatsache) besagen, dass *das unmögliche Ereignis, \emptyset , die Wahrscheinlichkeit null hat*, das heisst, $P[\emptyset] = 0$.

Zwei Ereignisse A und B , für die $A \cap B = \emptyset$ gilt, nennt man *unvereinbar* [mutually exclusive], da es unmöglich ist, dass beide bei einem Versuch des Zufallsexperiments auftreten. Wenn man in Kolmogorovs Axiom (iii) $A_1 = A, A_2 = B$ und $A_3 = \emptyset = A_4 = A_5 = \dots$ wählt und die Tatsache benutzt, dass $P[\emptyset] = 0$ ist, so sieht man, dass

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

immer dann gilt, wenn A und B unvereinbar sind. Erweitert man diese Beweisführung auf 3, 4 und mehr Ereignisse, so ergibt sich Folgendes:

Charakterisierung von Kolmogorovs Axiom (iii):

Dieses Axiom ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung von endlich vielen oder zählbar unendlich vielen *paarweise unvereinbaren Ereignissen gleich der Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist.*

Wenn A irgendein Ereignis ist, dann sind natürlich A und A^c unvereinbar. Überdies ist $A \cup A^c = \Omega$, so dass

$$P[A \cup A^c] = P[A] + P[A^c] = 1$$

gilt, wobei die erste Gleichung aus Axiom (iii) und die zweite aus Axiom (ii) von Kolmogorov folgt. Folglich haben wir bewiesen, dass für jedes Ereignis A gilt:

$$P[A^c] = 1 - P[A].$$

Bis jetzt haben wir uns nur mit den mathematischen Eigenschaften von $P[A]$ befasst. Es ist an dieser Stelle wichtig zu sagen, dass die Mathematik keine Hilfe liefert, das "richtige" Wahrscheinlichkeitsmass zu wählen. *Es ist physikalisches Denken, nicht Mathematik, das gebraucht werden muss, um das "richtige" Wahrscheinlichkeitsmass in einer bestimmten Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden.*

Beispiel 2.1.3 (Fortsetzung der Beispiele 2.1.1 und 2.1.2): Weil es keinen Grund gibt zu glauben, dass irgendeines der 8 Ergebnisse "wahrscheinlicher" ist als die andern, weist das "richtige" Wahrscheinlichkeitsmass jedem der sogenannten *elementaren Ereignisse*, die je ein einzelnes Ergebnis beinhalten, denselben Wert

$$P[\{\omega_i\}] = \frac{1}{8}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

zu. Damit ist das Wahrscheinlichkeitsmass $P[\cdot]$ vollständig bestimmt, da diese elementaren Ereignisse paarweise unvereinbar sind, und da jedes Ereignis (mit Ausnahme von \emptyset) als Vereinigung dieser elementaren Ereignisse geschrieben werden kann. Zum Beispiel kann das Ereignis $A = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, dass der Zähler bei einer 0 als niedrigstwertigem Bit stoppt, geschrieben werden als

$$A = \{\omega_0\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_4\} \cup \{\omega_6\},$$

und folglich ist

$$P[A] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

2.3. Zufallsgrößen und Erwartungswert

In vielen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie bemüht man sich nicht einmal darum, das Wahrscheinlichkeitssystem (Ω, \mathcal{A}, P) , das wir im vorherigen Abschnitt besprochen haben, explizit aufzustellen. Stattdessen beginnt man oft damit, passende "Zufallsgrößen" [random variables] zu bestimmen, die eine numerische Charakterisierung des Ergebnisses des Zufallsexperiments erlauben, und arbeitet dann direkt mit diesen Zufallsgrößen. Aber auch wenn die Formulierung des Wahrscheinlichkeitssystems für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht wesentlich ist, ist sie sicherlich unerlässlich zum *Verständnis* für das, was man tut, wenn man mit der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeitet. Tatsächlich ist der Begriff "Zufallsgröße" unverständlich ausserhalb der Formulierung des Wahrscheinlichkeitssystems.

Das Wesentliche einer "Zufallsgröße" ist, wie wir schon im letzten Abschnitt erwähnten, dass sie eine numerische Quantifizierung des Ergebnisses des Zufallsexperiments liefert. Dies ist in Fig. 2.3.1 dargestellt, wo wir eine Zufallsgröße X zeigen. Sie entsteht, indem dem Ergebnis ω des Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugewiesen wird.

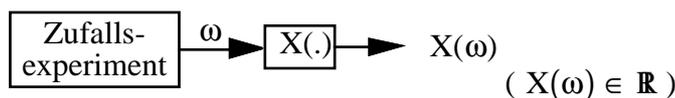


Fig. 2.3.1: Eine Zufallsgröße X .

Etwas unpräzise können wir sagen, dass eine "Zufallsgröße" irgendeine reellwertige Funktion mit dem Definitionsbereich Ω ist. Um die mathematische Folgerichtigkeit sicherzustellen, muss man allerdings eine kleine zusätzliche Forderung an die Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stellen, bevor man X als eine "Zufallsgröße" bezeichnen kann. Streng genommen müssen wir sagen, dass eine *Zufallsgröße* eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist, so dass für jede reelle Zahl x die Menge $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$ ein Ereignis ist, das heißt, dass die Menge zu \mathcal{A} gehört. In Anwendungen wird diese Bedingung praktisch von jeder "vernünftigen" Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt; es ist schwierig, Funktionen zu konstruieren, die nicht Zufallsgrößen sind.

Der stochastische Charakter einer bestimmten Zufallsgröße, nennen wir sie X , ist mit ihrer *Verteilungsfunktion* [probability distribution function], welche als Funktion

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

so definiert ist, dass

$$F_X(x) = P[\{\omega: X(\omega) \leq x\}]. \quad (2.3.1)$$

Die Definition einer Zufallsgröße garantiert uns, dass die Teilmenge von Ω , die auf der rechten Seite von (2.3.1) erscheint, ein Ereignis für jede reelle Zahl x ist, und ihre Wahrscheinlichkeit folglich wohldefiniert ist.

[**Warnung:** In einem Teil der Literatur über die Wahrscheinlichkeitstheorie (v. a. aus Osteuropa) wird die nicht-strikte Ungleichheit (\leq), die wir in der Definition sowohl der

Zufallsgrösse als auch ihrer Verteilungsfunktion gebraucht haben, durch die strikte Ungleichheit ($<$) ersetzt. Die Wahl zwischen " \leq " und " $<$ " ist nicht von grosser Wichtigkeit, verursacht aber Unterschiede im Detail, besonders wenn andere Ungleichheiten betrachtet werden. Indem wir " \leq " wählen, haben wir die in der westlichen Literatur gebräuchlichere Schreibweise befolgt.]

Es ist einfach, zwei wesentliche Eigenschaften einer Verteilungsfunktion abzuleiten. Wenn $x_1 < x_2$ ist, dann ist $\{\omega : X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega : X(\omega) \leq x_2\}$ und folglich $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. In Worten,

(i) Eine Verteilungsfunktion F_X ist nicht abnehmend.

Weil $\{\omega : X(\omega) \leq \infty\} = \Omega$ (man beachte aber, dass ∞ keine reelle Zahl ist) und weil $\{\omega : X(\omega) \leq -\infty\} = \emptyset$ ist, gilt die folgende Eigenschaft immer:

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Das Wesentliche einer Verteilungsfunktion ist, dass sie eine Funktion ist, die von 0 nach 1 zunimmt (möglicherweise mit einigen Intervallen, wo sie konstant bleibt), während ihr Argument von $-\infty$ nach $+\infty$ geht. Zwei Beispiele sind in Fig. 2.3.2 gezeigt.

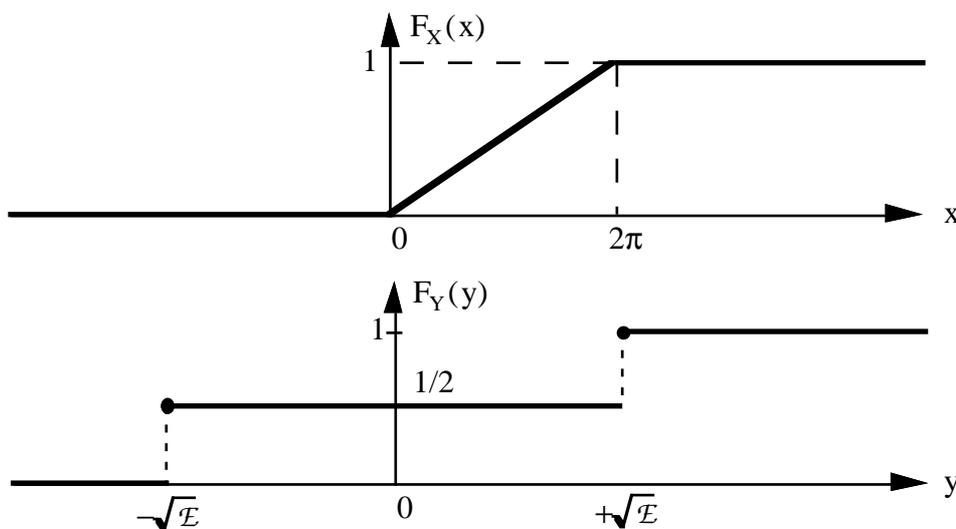


Fig. 2.3.2: Zwei Beispiele von Verteilungsfunktionen.

Anstatt mit der Verteilungsfunktion einer Zufallsgrösse zu arbeiten, bevorzugt man normalerweise ihre *Ableitung*, welche die *Wahrscheinlichkeitsdichte* [probability density function] einer Zufallsgrösse genannt wird. Nicht alle Zufallsgrössen haben Wahrscheinlichkeitsdichten, sogar wenn wir (wie wir es immer tun werden) Diracstösse als Ableitung erlauben. Glücklicherweise aber haben praktisch alle Zufallsgrössen, denen man in Anwendungen begegnet, Wahrscheinlichkeitsdichten (wenn man Diracstösse erlaubt). Wir werden p_X schreiben, um die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgrösse X zu bezeichnen. In Fig. 2.3.3 zeigen wir die Wahrscheinlichkeitsdichten der beiden Zufallsgrössen, deren Verteilungsfunktionen in Fig. 2.3.2 gezeigt wurden. [Es gibt eine Unsicherheit über den Wert von $p_X(x)$ bei $x = 0$ und $x = 2\pi$, da die Ableitung von F_X eine Unstetigkeit in

diesen Punkten hat. Wir lösen diese Zweideutigkeit willkürlich, indem wir uns einigen, p_X rechtsseitig stetig [continuous from the right] zu definieren, eine Eigenschaft, die F_X immer besitzt. Das ist jedoch ein technisches Detail und absolut unwichtig in Anwendungen.]

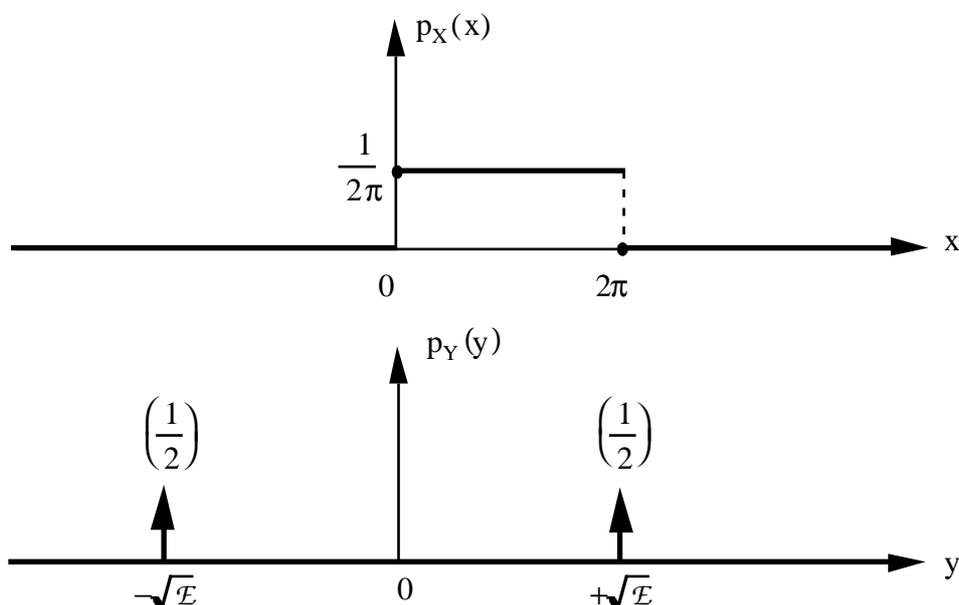


Fig. 2.3.3: Die Wahrscheinlichkeitsdichten, die zu den Verteilungsfunktionen in Fig. 2.3.2 gehören.

Weil p_X die Ableitung von F_X ist, folgt aus der Tatsache, dass F_X nicht abnehmend ist:

(i) Eine Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt in jedem Punkt x auf der reellen Achse entweder einen reellen, nicht-negativen Wert an oder sie enthält einen Diracstoss mit positiver "Fläche". Das fundamentale Theorem der Analysis, welches Funktionen und die Integrale ihrer Ableitungen in Beziehung setzt, sagt uns, dass:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x).$$

Dadurch ergibt sich folgende Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsdichte direkt aus Eigenschaft (ii) der Verteilungsfunktion:

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1. \quad (2.3.2)$$

Es ist wichtig, ein Gefühl für die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsdichte zu bekommen. Zu diesem Zweck betrachte man das Ereignis $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}$ für irgendwelche reellen Zahlen a und b mit $a < b$. Weil

$$\{\omega : X(\omega) \leq b\} = \{\omega : X(\omega) \leq a\} \cup \{\omega : a < X(\omega) \leq b\}$$

und weil die Ereignisse in der Vereinigung auf der rechten Seite sich gegenseitig ausschliessen, folgt, dass

$$F_X(b) = F_X(a) + P[\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}].$$

Wir sehen nun, dass

$$P[\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}] = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a+}^{b+} p_X(x) dx, \quad (2.3.2a)$$

wobei wir beim letzten Schritt das Grundtheorem der Analysis angewandt haben. In Worten bedeutet (2.3.2a), dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgrösse X einen Wert zwischen a und b annimmt, durch Integration von $p_X(\cdot)$ über dieses Intervall gefunden werden kann. Aus diesem Grund wird (2.3.2a) oft als

$$P[a < X \leq b] = \int_{a+}^{b+} p_X(x) dx \quad (2.3.2b)$$

geschrieben, wobei " $a < X \leq b$ " die Kurznotation von $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}$ ist. [Man erinnere sich, dass Ereignisse und nur Ereignisse Wahrscheinlichkeiten haben!] Falls \mathcal{R} irgendeine Region der reellen Achse bezeichnet, die als Vereinigung disjunkter Intervalle geschrieben werden kann, ergeben obige Ausführungen

$$P[X \in \mathcal{R}] = \int_{\mathcal{R}} p_X(x) dx, \quad (2.3.2c)$$

wobei wiederum " $X \in \mathcal{R}$ " die Kurznotation des Ereignisses $\{\omega : X(\omega) \in \mathcal{R}\}$ ist und das Integral auf der rechten Seite von (2.3.2c) von links nach rechts über die Intervalle, die \mathcal{R} bestimmen, berechnet wird. In anderen Worten heisst das, dass $P[X \in \mathcal{R}]$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsgrösse X einen Wert im Bereich \mathcal{R} annimmt. Wir fassen zusammen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgrösse einen Wert in einem Bereich \mathcal{R} der reellen Achse annimmt, kann durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über diesen Bereich gefunden werden, vorausgesetzt, dass das Integral über \mathcal{R} existiert.

Es muss aufgepasst werden, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion Impulse an den Endpunkten der Integrationsintervalle enthält. Die Fläche der Impulse sollte im Integral enthalten sein, falls die Impulse sich an einem Punkt in \mathcal{R} befinden. Beispielsweise, wenn $p_X(\cdot)$ einen Impuls an beiden Endpunkten des Intervalles $[a, b]$ enthält, soll nur die Fläche des Impulses bei b im Integral von (2.3.2b) enthalten sein. Umgekehrt, um die Wahrscheinlichkeit

$$P[a \leq X < b] = \int_{a-}^{b-} p_X(x) dx$$

zu finden, soll nur die Fläche des Impulses bei a im Integral enthalten sein.

Der Begriff "Erwartungswert" ist von entscheidender Bedeutung in den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn f eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und X eine Zufalls-

grösse ist, dann wird der *Erwartungswert* [expected value] von $f(X)$ mit $E[f(X)]$ bezeichnet und durch das Integral

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx \quad (2.3.3)$$

definiert [vorausgesetzt natürlich, dass f und p_X so beschaffen sind, dass das Integral Sinn ergibt]. Nichts hindert uns daran, $f(x) = x$ zu setzen für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall wird (2.3.3)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx. \quad (2.3.4)$$

Diese Zahl $E[X]$ wird *Mittelwert* [mean] von X genannt. Die Wahl $f(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und n als positiver ganzer Zahl gibt

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx, \quad (2.3.5)$$

welches das *n-te Moment* von X genannt wird. Der Mittelwert von X wird oft mit m_X bezeichnet. Mit dieser Notation können wir in (2.3.3) die Wahl $f(x) = (x - m_X)^2$ treffen, um einen sehr wichtigen Erwartungswert zu definieren, den wir *Varianz* von X nennen und mit $\text{Var}[X]$ bezeichnen:

$$\text{Var}[X] = E[(X - m_X)^2]. \quad (2.3.6)$$

Zu beachten ist, dass

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2m_X x + m_X^2) p_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx - 2m_X \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx + m_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx \\ &= E[X^2] - 2m_X m_X + m_X^2 \end{aligned}$$

ist, was die sehr nützliche Beziehung

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (2.3.7)$$

ergibt. In Worten heisst dies, dass *die Varianz einer Zufallsgrösse gleich dem zweiten Moment minus dem Quadrat des ersten Moments ist.*

2.4. Zufallsvektoren und Erwartungswert

In den meisten der interessanten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie hat man es mit mehreren Zufallsgrößen im selben Wahrscheinlichkeitssystem zu tun. Mit einem *n-dimensionalen Zufallsvektor* [n-dimensional random vector] meint man nichts anderes als ein n-Tupel $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, dessen Komponenten Zufallsgrößen sind.

Die (n-dimensionale) *Verteilungsfunktion* [probability distribution function] eines solchen Zufallsvektors \underline{X} ist die Funktion $F_{\underline{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass für jedes $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in \mathbb{R}^n

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \mathbb{P} \left[\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \right] \quad (2.4.1)$$

gilt. Wir beachten, dass durch die Definition einer Zufallsgröße die Menge $\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}$ immer ein Ereignis (das heisst, eine Menge in \mathcal{A}) ist, und folglich ist auch $\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}$ immer ein Ereignis, weil \mathcal{A} eine Sigma-Algebra ist. Es folgt, dass die Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite von (2.4.1) immer wohldefiniert ist, oder äquivalent, dass $F_{\underline{X}}$ immer eine wohldefinierte Funktion für jede Wahl der Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n ist. Für $n = 1$ reduziert sich natürlich $F_{\underline{X}}$ zur Verteilungsfunktion F_{X_1} der Zufallsgrößen X_1 .

Wenn $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\underline{x} \ominus = (x_1 \ominus, x_2 \ominus, \dots, x_n \ominus)$, wobei für ein gewisses j ($1 \leq j \leq n$) $x_j < x_j \ominus$, jedoch $x_i = x_i \ominus$ für $i \neq j$, dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i \ominus\}.$$

Folglich ergibt sich aus (2.4.1), dass $F_{\underline{X}}(\underline{x}) \leq F_{\underline{X}}(\underline{x} \ominus)$ ist. In Worten ausgedrückt:

- (i) *Eine n-dimensionale Verteilungsfunktion $F_{\underline{X}}$ ist für feste Werte für irgendwelche $n-1$ Komponenten ihres Arguments $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, eine nicht abnehmende Funktion der übrigbleibenden Komponente ihres Arguments.*

Für eine bequeme Notation richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die letzte Komponente x_n von $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, aber das Resultat, das wir herleiten, gilt ebenso für irgendeine Komponente. Weil $\{\omega : X_n(\omega) \leq -\infty\} = \emptyset$ ist, folgt aus (2.4.1)

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Interessanter ist, weil $\{\omega : X_n(\omega) \leq +\infty\} = \Omega$ ist, dass aus (2.4.1) weiter

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow +\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P} \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} \{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \right] \\ &= F_{X_1 \dots X_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

folgt. In anderen Worten heisst das, dass die (n -dimensionale) Verteilungsfunktion für \underline{X} vollständig die Wahrscheinlichkeitsverteilung für irgendeinen Zufallsvektor wie zum Beispiel (X_1, \dots, X_{n-1}) , der ein "Subvektor" von \underline{X} ist, bestimmt. Wir fassen zusammen:

(ii) Für irgendein j ($1 \leq j \leq n$) ist

$$\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.4.2)$$

und

$$\lim_{x_j \rightarrow +\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1 \dots X_{j-1} X_{j+1} \dots X_n}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n). \quad (2.4.3)$$

Diese Eigenschaften (i) und (ii) sind die zwei wesentlichen Charakteristiken einer n -dimensionalen Verteilungsfunktion.

Für Zufallsvektoren wie auch für Zufallsgrössen ist es normalerweise bequemer, eher mit Wahrscheinlichkeitsdichten (wenn diese existieren) als mit Verteilungsfunktionen (diese existieren immer) zu arbeiten. Die n -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte [n-dimensional probability density function] $p_{\underline{X}}$ des Zufallsvektors $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ist als "Ableitung" von $F_{\underline{X}}$ so definiert, dass

$$p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\underline{X}}}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.4.4)$$

vorausgesetzt, dass diese partiellen Ableitungen existieren (zumindest wenn wir in Analogie zum eindimensionalen Fall den Gebrauch von mehrdimensionalen Diracstössen erlauben). Die folgenden zwei Eigenschaften ergeben sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $F_{\underline{X}}$.

(i) Eine n -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nimmt in jedem Punkt $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in \mathbb{R}^n entweder einen reellen, nicht-negativen Wert an oder enthält einen Diracstoss positiver "Fläche".

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_j = p_{X_1 \dots X_{j-1} X_{j+1} \dots X_n}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n). \quad (2.4.5)$$

Die Funktion $p_{\underline{X}}(\cdot)$, wobei $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, wird oft *Verbundwahrscheinlichkeitsdichte* [joint probability density function] der Zufallsgrössen X_1, X_2, \dots, X_n genannt.

Es scheint beinahe unnötig zu sagen, dass die Interpretation der Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines Zufallsvektors grundsätzlich gleich ist wie die der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer einzelnen Zufallsgrösse. Um die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsvektor $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ einen Wert innerhalb des Bereiches \mathcal{R} des n -dimensionalen Euklidischen Raumes annimmt, zu berechnen, muss einfach $p_{\underline{X}}(\cdot)$ über diesen Bereich integriert werden, d.h.

$$P[\underline{X} \in \mathcal{R}] = \int_{\mathcal{R}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Wir heben wiederum hervor, dass die Notation " $\underline{X} \in \mathcal{R}$ " die Kurznotation des Ereignisses ist, das ausgeschrieben als $\{\omega : \underline{X}(\omega) \in \mathcal{R}\}$ notiert wird. Selbstverständlich muss \mathcal{R} einen Bereich darstellen, für den das Integral über diesen Bereich existiert.

Wenn f eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und \underline{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor ist, dann wird der *Erwartungswert* [expected value] von $f(\underline{X})$ als $E[f(\underline{X})]$ bezeichnet und durch das n -dimensionale Integral

$$E[f(\underline{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.4.6)$$

definiert [wiederum vorausgesetzt, dass f und $p_{\underline{X}}$ so beschaffen sind, dass dieses Integral sinnvoll ist]. Um die Notation einfach zu halten, werden wir (2.4.6) oft als Kurznotation

$$E[f(\underline{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{x}) p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (2.4.7)$$

schreiben.

Bei weitem die wichtigste Eigenschaft der Erwartungswerte ist die Linearität.

Die Linearität des Erwartungswertes: Wenn f_1 und f_2 reellwertige Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{R}^n sind, wenn c_1 und c_2 reelle Zahlen und \underline{X} ein n -dimensionaler Zufallsvektor ist, dann gilt

$$E[c_1 f_1(\underline{X}) + c_2 f_2(\underline{X})] = c_1 E[f_1(\underline{X})] + c_2 E[f_2(\underline{X})]. \quad (2.4.8)$$

Die Gültigkeit von (2.4.8) wird folgendermassen bewiesen:

$$\begin{aligned} E[c_1 f_1(\underline{X}) + c_2 f_2(\underline{X})] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (c_1 f_1(\underline{x}) + c_2 f_2(\underline{x})) p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\underline{x}) p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\underline{x}) p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= c_1 E[f_1(\underline{X})] + c_2 E[f_2(\underline{X})]. \end{aligned}$$

Der Leser oder die Leserin sollte beachten, dass (2.4.8) natürlich auch für den speziellen Fall $n = 1$ gilt, wo \underline{X} eine gewöhnliche Zufallsgrösse X ist. Folglich kann zum Beispiel die Gültigkeit der Gleichung (2.3.7) folgendermassen gezeigt werden, wobei wir uns die Tatsache zu nutzen machen, dass $m_X = E[X]$ ist:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - m_X)^2] = E[X^2 - 2m_X X + m_X^2] \\ &= E[X^2] - 2m_X E[X] + m_X^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2. \end{aligned}$$

Die Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n nennt man *statistisch unabhängig* (oder einfach *unabhängig*), wenn ihre Verbundverteilungsfunktion in das Produkt ihrer einzelnen Verteilungsfunktionen zerlegt werden kann, das heißt, wenn

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \text{ gilt.}$$

Wenn alle Wahrscheinlichkeitsdichten wohldefiniert sind, erkennt man, dass X_1, X_2, \dots, X_n genau dann statistisch unabhängig sind, wenn

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n$$

gilt. Die statistische Unabhängigkeit von mehreren Zufallsvektoren ist analog definiert.

Es lohnt sich, an dieser Stelle über die Interpretation eines Zufallsvektors $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ im Sinne des zugrundeliegenden Zufallsexperiments nachzudenken. Diese Interpretation ist in Fig. 2.4.1 gezeigt. Wichtig zu beachten ist, dass wir, jedesmal wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, genau ein Ergebnis ω erhalten, aber wir erhalten auch einen Wert von *jeder* der Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n . Gleichbedeutend erhalten wir, jedesmal wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, ein Ergebnis des Zufallsexperiments, aber wir erhalten auch einen Wert $\underline{x} = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ des Zufallsvektors $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Wenn man diese Interpretation des Zufallsvektors gut versteht, wird man keine Schwierigkeiten haben zu begreifen, was unter einem "stochastischen zeitdiskreten Signal", wie im nächsten Abschnitt definiert, verstanden wird.

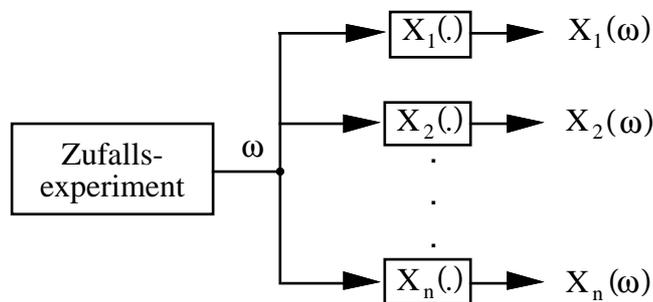


Fig. 2.4.1: Ein Zufallsvektor $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2.5. Stochastische Prozesse

Bezeichnen wir \mathcal{R} als Menge aller Zufallsgrößen, die man in einem gegebenen Wahrscheinlichkeitssystem (Ω, \mathcal{A}, P) , definieren kann. Dann können wir einen *zeitdiskreten stochastischen Prozess* [discrete-time stochastic process], sagen wir $X[.]$, als irgendeine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{Z} und Bildbereich \mathcal{R} definieren. Mit anderen Worten heißt das, dass für jede ganze Zahl k $X[k]$ eine Zufallsgröße ist. (Wir bemerken, dass der Ausdruck *Zufallsprozess* [random process] gleichbedeutend mit dem Ausdruck *stochastischer Prozess* [stochastic process] gebraucht wird.) Das ist eine sehr einfache Definition, aber man muss ihre Interpretation gründlich verstehen.

In Fig. 2.5.1 geben wir die Interpretation eines zeitdiskreten stochastischen Prozesses vom Standpunkt des zugrundeliegenden Zufallsexperiments wieder. Weil $X[k]$ eine Zufallsgrösse und folglich eine Funktion mit Definitionsbereich Ω und Bildbereich \mathbb{R} ist, sind wir gezwungen, den Wert von $X[k]$ beim Punkt ω als $X[k](\omega)$ zu schreiben, selbst wenn dieser Doppelgebrauch der Klammern zuerst ein wenig ungewohnt scheinen mag. Jedesmal wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, erhalten wir genau ein Ergebnis ω damit einen Wert von jeder der Zufallsgrössen $X[k]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wenn wir $x[k]$ für diesen spezifischen Wert oder für diese spezifische "Realisierung" $X[k](\omega)$ von $X[k]$ schreiben, dann können wir sagen, dass wir eine Realisierung $x[.]$ des zeitdiskreten stochastischen Prozesses $X[.]$, wobei $x[.]$ ein reelles zeitdiskretes Signal ist, erhalten haben.

Mit anderen Worten heisst dies, dass *eine Realisierung eines zeitdiskreten stochastischen Prozesses immer ein reelles zeitdiskretes Signal ist*. Wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, erhalten wir ein Ergebnis ω und damit eine zeitdiskrete Funktion als entsprechende Realisierung des zeitdiskreten Zufallsprozesses. Obwohl wir den Wert $x[k]$ der Zufallsgrösse $X[k]$ als "früher" ankommend als den Wert $x[k+1]$ von $X[k+1]$ interpretieren werden, müssen wir uns bewusst sein, dass das Ergebnis ω des Zufallsexperiments in einem gewissen Sinne "gleichzeitig" alle Komponenten des stochastischen Prozesses bestimmt, da ω eine *vollständige* Beschreibung des Ergebnisses des Zufallsexperiments sein muss. Es schadet nicht, das Zufallsexperiment von einem Wesen durchgeführt zu denken, das jenseits der Zeit existiert. Dieses Wesen sieht das ganze Signal $x[.]$, die Realisierung von $X[.]$, wenn es das Zufallsexperiment durchführt, aber dieses Wesen "übermittelt" uns armen Kreaturen, die innerhalb der Zeit existieren müssen, die erhaltenen Komponenten von $x[.]$ sequentiell.

Es sollte nun klar sein, dass das, was mit einem *stochastischen zeitdiskreten Signal* gemeint ist, nicht mehr und nicht weniger als ein *zeitdiskreter Zufallsprozess* ist.

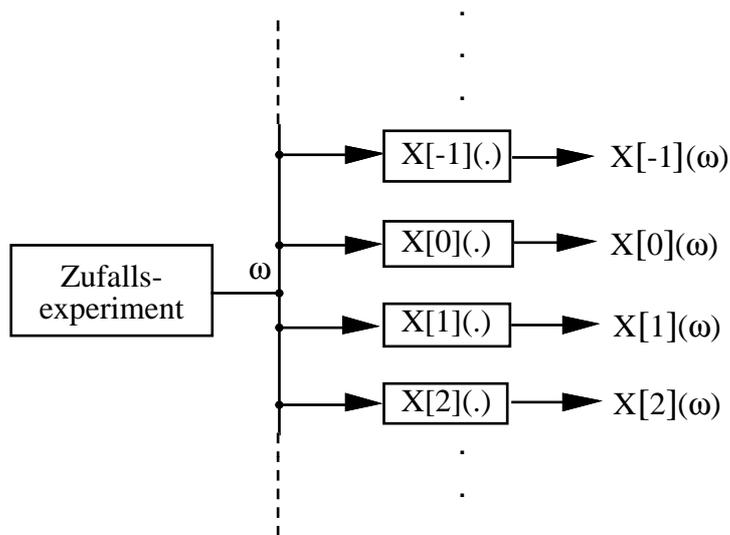


Fig. 2.5.1: Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess $X[.]$.

Kapitel 3

Die z-Transformation

3.1. Einführung

Die z-Transformation ist ein Werkzeug, um ein zeitdiskretes Signal in einer alternativen Weise darzustellen. Sie bringt oft viel Einsicht in die Natur des Signals, und dies führt zu analytischer Einfachheit bei der Beschreibung, wie solche Signale von linearen Systemen modifiziert werden. Allerdings beinhalten intuitive Behandlungen der z-Transformation oft naturgegebene Widersprüche, die sehr verwirrend und störend für den Studenten oder die Studentin sein können. In diesem Abschnitt beschreiben wir derartige Fragen, die in solchen intuitiven Behandlungen der z-Transformation nie beantwortet werden. Danach werden wir eine genaue, aber trotzdem einfache Behandlung darstellen. Unser Ziel ist die Erarbeitung der mathematischen Exaktheit [rigor], die man braucht, um die z-Transformation zu verstehen, aber wir wollen *Sturheit* [rigor mortis] vermeiden.

Wir nehmen an, dass $f[\cdot]$ ein komplexes zeitdiskretes Signal ist. [Die Theorie der z-Transformation ist für komplexe Signale genau so einfach wie für reelle Signale zu entwickeln; die Verallgemeinerung, komplexe Signale zu erlauben, ist aber sehr nützlich, wie wir später sehen werden.] Intuitive Behandlungen der z-Transformation beginnen normalerweise mit der "Definition" der z-Transformation von $f[\cdot]$, die durch die Funktion $F(\cdot)$ mit

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] z^{-k}, \quad (3.1.1)$$

gegeben ist, wobei z eine komplexe Zahl ist. [Einige Autoren verlangen, dass $f[\cdot]$ ein kausales Signal ist, sodass die Summe über k sich zur Summe von $k = 0$ bis $+\infty$ reduziert, aber das vermeidet nicht alle Probleme, die wir bald beschreiben werden.] Als ein sehr spezielles Beispiel wollen wir die Einheitsschrittfunktion $u[\cdot]$ betrachten. Ihre z-Transformation ist $U(\cdot)$, wobei

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Eine offensichtliche erste Frage ist: Was ist der Definitionsbereich der Funktion $U(\cdot)$? Es kann bestimmt nicht die ganze komplexe Ebene \mathbb{C} sein, weil die Reihe in (3.1.2) für $|z| \leq 1$ divergiert. Diese Reihe konvergiert für $|z| > 1$, somit können wir annehmen, dass der Definitionsbereich von $U(\cdot)$ die Menge $\{z : |z| > 1\}$, das heisst, das Äussere des Einheitskreises in der komplexen Ebene, ist. Die Reihe in (3.1.2) ist eine geometrische Reihe, die für $|z| > 1$ zu

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (3.1.3)$$

konvergiert.

Tatsächlich würden praktisch alle Autoren sagen, dass die z-Transformierte $U(\cdot)$ durch (3.1.3) gegeben ist, und zwar für alle $z \in \mathbb{C}$ mit Ausnahme des Punktes $z = 1$, für welchen die rechte Seite von (3.1.3) keinen Wert aus \mathbb{C} annimmt. Folglich würde es scheinen, dass für den Definitionsbereich von $U(\cdot)$ die ganze komplexe Ebene ohne den Punkt $z = 1$ gewählt werden sollte.

Betrachten wir nun die zeitdiskrete Funktion $f[\cdot]$ mit $f[k] = -1$ für $k < 0$ und $f[k] = 0$ für $k \geq 0$, das heisst $f[\cdot] = -u[-\cdot - 1]$. Die "Definition" (3.1.1) ergibt

$$\begin{aligned} F(z) &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} z^{-k} \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} z^i \\ &= -z \sum_{k=0}^{\infty} z^k. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Die Potenzreihe in (3.1.4) divergiert für $|z| \geq 1$, aber konvergiert für $|z| < 1$ zu $1/(1-z)$. Folglich sind wir gezwungen zu sagen, dass

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \quad (3.1.5)$$

ist und daraus zu folgern, dass der Definitionsbereich von $F(\cdot)$ die komplexe Ebene ohne den Punkt $z = 1$ ist.

Damit haben wir ein Dilemma: Sowohl die Einheitsschrittfunktion $u[\cdot]$ als auch ihre negative, zeitumgekehrte und verschobene Version $f[\cdot] = -u[-\cdot - 1]$ haben exakt die gleiche z-Transformation! Folglich scheint es, dass keine "inverse Transformation" existieren kann, was bedeuten würde, dass die z-Transformation praktisch unbrauchbar ist. Es sollte dem Leser ersichtlich sein, dass die Konvergenz von Reihen hier eine wesentliche Rolle spielt. Um Ordnung in die Angelegenheit zu bringen, müssen wir einige Tatsachen über die Konvergenz von Reihen gebrauchen, die wir im nächsten Abschnitt besprechen.

3.2. Potenzreihen und Laurentreihen

Unter einer (komplexen) Reihe [series] versteht man eine unendliche Summe der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, wobei die Ausdrücke a_i komplexe Zahlen sind. Nehmen wir an, dass A_n die Teilsumme

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

für jede positive ganze Zahl n bezeichnet. Sie besteht aus den ersten $n + 1$ Summanden der Reihe. Beachte, dass A_n immer eine komplexe Zahl ist. Man sagt, dass die Reihe gegen die komplexe Zahl γ *konvergiert*, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \gamma$ ist und schreibt dann

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \gamma.$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ nicht existiert, sagt man, die Reihe *divergiert*. Weiter sagt man, dass die Reihe *absolut konvergiert*, wenn die assoziierte Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz, aber nicht umgekehrt. Eine sehr nette Eigenschaft einer absolut konvergenten Reihe ist, dass jede Reihe, die man durch *Umgruppieren* ihrer Ausdrücke erhält, gegen dieselbe komplexe Zahl wie die ursprüngliche Reihe konvergiert und ebenfalls absolut konvergiert; überdies haben nur absolut konvergente Reihen diese wichtige Eigenschaft der *Invarianz unter Umgruppierung*.

Unter einer (komplexen) *Potenzreihe* [power series] $C(x)$ versteht man eine unendliche Summe der Form

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad (3.2.1)$$

wobei die Koeffizienten c_i komplexe Zahlen sind und x eine komplexe Variable ist. Man sagt, dass die Potenzreihe $C(x)$ an der Stelle $x = x_0$, wobei $x_0 \in \mathbb{C}$ ist, *konvergiert*, falls die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i,$$

sagen wir gegen γ , konvergiert, und schreibt dann $C(x_0) = \gamma$; andernfalls sagt man, dass die Potenzreihe $C(x)$ an der Stelle $x = x_0$ *divergiert*. Man sagt weiter, dass $C(x)$ an der Stelle $x = x_0$ *absolut konvergiert*, wenn die obige Reihe absolut konvergiert. Die Haupteigenschaft der Konvergenz von Potenzreihen ist im folgenden berühmten Theorem festgehalten:

Cauchy-Hadamard Theorem: Wenn eine Potenzreihe weder überall konvergiert noch überall divergiert, dann gibt es eine positive reelle Zahl r , genannt *Konvergenzradius* [radius of convergence], so dass die Potenzreihe für alle komplexen Zahlen x , wobei $|x| < r$, absolut konvergiert und für alle x , wobei $|x| > r$, divergiert. Überdies ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|}}. \quad (3.2.2)$$

Sei $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ eine Sequenz reeller Zahlen. Der *limes superior* dieser Sequenz ist die kleinste obere Grenze der reellen Zahlen β , für die $\beta_i > \beta$ für unendlich viele i gilt. Man schreibt $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \beta$. Gilt $\beta_i > \beta$ für unendlich viele i für alle reellen β , dann ist $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = +\infty$. Gibt es keine reellen Zahlen β , für die $\beta_i > \beta$ für unendlich viele i gilt, dann ist $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = -\infty$. Folglich existiert $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i$ immer. Der *limes inferior* ist analog definiert. Wenn $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i$ existiert, dann ist natürlich $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i$.

Beispiel 3.2.1:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \beta_i &= (-1)^i & \Rightarrow & \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 1 & \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = -1 \\
 & & & & \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i \text{ existiert nicht.} \\
 (2) \quad \beta_i &= (-2)^i & \Rightarrow & \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = +\infty & \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = -\infty \\
 & & & & \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i \text{ existiert nicht.} \\
 (3) \quad \beta_i &= -2^i & \Rightarrow & \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = -\infty \\
 (4) \quad \beta_i &= -\left(\frac{1}{2}\right)^i & \Rightarrow & \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 0 \\
 (5) \quad \beta_i &= \begin{cases} 1 & \text{ungerade } i \\ 2^i & \text{gerade } i \end{cases} & \Rightarrow & \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i = +\infty & \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 1 \\
 & & & & \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i \text{ existiert nicht.}
 \end{aligned}$$

Die Potenzreihe (3.2.1) *konvergiert überall* (das heisst, für alle $x \in \mathbb{C}$) genau dann, wenn (3.2.2) formal $r = +\infty$ ergibt, und *divergiert überall*, wenn (3.2.2) formal $r = 0$ ergibt. Folglich können wir r immer den *Konvergenzradius* nennen, sogar in diesen Extremfällen. Wenn jedoch $|x| = r$ ist, kann alles passieren! Die Potenzreihe mit $c_0 = 0$ und $c_i = 1/i^m$ wobei m eine nicht-negative ganze Zahl ist, hat den Konvergenzradius $r = 1$ für alle m . Aber sie konvergiert für alle x mit $|x| = 1$, wenn $m = 2$ ist. Hingegen divergiert sie für alle diese x , wenn $m = 0$ ist. Und schliesslich konvergiert sie für einige von diesen x (zum Beispiel für $x = -1$) und divergiert für andere (zum Beispiel für $x = 1$), wenn $m = 1$ ist.

Die obigen Betrachtungen zeigen, dass es sehr natürlich ist, eine (komplexe) Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r als eine komplexwertige Funktion zu betrachten, deren Definitionsbereich das *Innere* des Kreises mit Radius r ist, welcher im Ursprung der komplexen Ebene zentriert ist.

Betrachten wir als nächstes die Reihe der Form

$$B(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^{-i}, \quad (3.2.3)$$

wobei die Koeffizienten komplexe Zahlen sind und x eine komplexe Variable ist. Dies ist eine Potenzreihe mit der Variablen $y = x^{-1}$ (wobei wir $b_0 = 0$ in unserer Potenzreihe verlangt haben, aber das ist unwichtig). Genau dieselben Argumente wie oben zeigen, dass diese Reihe für alle x *ausserhalb* des Kreises mit dem Radius r um den Ursprung absolut konvergiert, und im Inneren dieses Kreises divergiert. Dieser Konvergenzradius r ist gegeben durch

$$r = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|b_i|}. \quad (3.2.4)$$

Wieder ist es naheliegend, sich diese Potenzreihe in x^{-1} , wenn ihr Konvergenzradius r positiv ist, als eine komplexwertige Funktion vorzustellen, deren Definitionsbereich das *Äussere* des Kreises mit Radius r und Zentrum im Ursprung der komplexen Ebene ist.

Unter einer *Laurentreihe* $D(x)$ versteht man die Summe zweier unendlicher Summen des folgenden Typs:

$$D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i + \sum_{i=1}^{\infty} d_{-i} x^{-i}, \quad (3.2.5)$$

wobei die Koeffizienten d_i und d_{-i} komplexe Zahlen sind, und x eine komplexe Variable ist. Man sieht, $D(x)$ ist gerade die Summe der Potenzreihe $C(x)$ in (3.2.1) mit $c_i = d_i$, und der Potenzreihe (in x^{-1}) $B(x)$ in (3.2.3) mit $b_i = d_{-i}$.

Wenn r_1 der Konvergenzradius von $C(x)$ und r_2 der Konvergenzradius von $B(x)$ ist, konvergiert $D(x)$ folglich nirgends wenn $r_1 < r_2$. Ist aber $r_1 > r_2$, dann konvergiert $D(x)$ absolut für alle x im *Inneren des Ringes* mit Zentrum im Ursprung, mit Innenradius r_2 und Aussenradius r_1 , während sie überall im *Äusseren des Ringes* divergiert. Es ist deshalb sehr natürlich, eine Laurentreihe als eine komplexwertige Funktion zu betrachten, deren Definitionsbereich das Innere dieses Ringes ist. Wir bemerken hier, dass man (3.2.5) normalerweise als

$$D(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_i x^i \quad (3.2.6)$$

schreibt, aber dies ist eigentlich nicht korrekt, da es die Reihenfolge der zu bildenden Summe nicht angibt. Obwohl dies so ist, werden wir dem üblichen Gebrauch folgen und eine Laurentreihe wie in (3.2.6) schreiben, aber wir machen den Leser und die Leserin darauf aufmerksam, dass eigentlich die Summe von zwei Potenzreihen (eine in x und die andere in x^{-1}) gemeint ist, wie in (3.2.5) angegeben.

Wenn die Potenzreihe $C(x)$ in (3.2.1) einen positiven Konvergenzradius r hat und folglich eine komplexwertige Funktion $C(\cdot)$ mit Definitionsbereich $\{x : |x| < r\}$ definiert, wie oben beschrieben, dann garantiert die absolute Konvergenz der Potenzreihe für alle x in diesem Definitionsbereich, dass die *Ableitung* $C'(\cdot)$ überall in diesem Definitionsbereich existiert und durch die Potenzreihe

$$\begin{aligned} C'(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) c_{i+1} x^i \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

gegeben ist und durch *gliedweise Differenzierung* der Potenzreihe $C(x)$ erhalten wird; überdies hat die Potenzreihe $C'(x)$ genau den gleichen Konvergenzradius r wie die Potenzreihe $C(x)$. Diese Eigenschaft der Ableitung gilt ebenso für die komplexwertigen Funktionen $B(x)$ und $D(x)$ mit den Definitionsbereichen $\{x : |x| > r\}$ und $\{x : r_2 < |x| < r_1\}$, gegeben durch die Potenzreihe (3.2.3) respektive durch die Laurentreihe (3.2.6).

Wir erinnern uns jetzt daran, dass eine komplexwertige Funktion $F(\cdot)$, deren Definitionsbereich eine *offene* Teilmenge der komplexen Ebene ist (das heisst, für jedes x in diesem Definitionsbereich existiert eine genügend kleine Umgebung [neighborhood] von x so, dass diese Umgebung eine Teilmenge des Definitionsbereiches ist), genau dann *analytisch im Punkt* x_0 in diesem Definitionsbereich genannt wird, wenn es eine genügend kleine Umgebung von x_0 gibt so, dass die Ableitung $F'(z)$ von F überall in dieser Umgebung existiert. Die Funktion $F(\cdot)$ wird *analytisch* oder *holomorph* oder *regulär* [analytic] genannt, wenn ihr Definitionsbereich eine offene, zusammenhängende Teilmenge der komplexen Ebene ist und sie bei jedem Punkt x_0 in ihrem Definitionsbereich analytisch ist. Wir sehen, dass die oben definierten Funktionen $C(\cdot)$, $B(\cdot)$ und $D(\cdot)$ analytische Funktionen sind, falls ihre Definitionsbereiche nicht leer sind.

Analytische Funktionen haben viele bemerkenswerte Eigenschaften. Vielleicht die Eindrucksvollste ist im folgenden Theorem festgehalten.

Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen [Uniqueness Theorem for Analytic Functions]: Wenn zwei analytische Funktionen in einer Umgebung eines gewissen Punktes in der Schnittmenge ihrer Definitionsbereiche oder entlang irgend eines Weges von endlicher Länge in dieser Schnittmenge gleich sind, dann sind sie überall in der Schnittmenge ihrer Definitionsbereiche gleich.

Dieses Theorem impliziert den Begriff der *analytischen Fortsetzung* [analytic continuation]. Wenn $F_1(\cdot)$ und $F_2(\cdot)$ analytische Funktionen mit den Definitionsbereichen D_1 respektive D_2 sind so, dass $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, und falls $F_1(z) = F_2(z)$ ist für alle $z \in D_1 \cap D_2$, dann ist die Funktion $F(\cdot)$ mit $F(z) = F_1(z)$ für $z \in D_1$ und $F(z) = F_2(z)$ für $z \in D_2$ analytisch im Definitionsbereich $D = D_1 \cup D_2$. Man sagt, dass $F_2(\cdot)$ die *einzigste analytische Fortsetzung* von F_1 in der Teilmenge $D_2 \cap D_1^c$ der komplexen Ebene ist. Folglich kann jede analytische Funktion durch analytische Fortsetzung auf eine *einzigste* Art zu einer analytischen Funktion, deren Definitionsbereich nicht weiter vergrössert werden kann, erweitert werden. Diese letztgenannte Funktion wird einfach die *analytische Fortsetzung* der vorherigen Funktion genannt.

In der Theorie der komplexen Funktionen wird gezeigt, dass die *einzigsten* analytischen Funktionen, deren Definitionsbereich die komplexe Ebene mit Ausnahme von endlich vielen Punkten, die *rationalen Funktionen* sind, das heisst, die Funktionen $F(\cdot)$ mit

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (3.2.8)$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind. Die Punkte x , bei denen $F(\cdot)$ nicht analytisch ist [unter der Annahme, dass der grösste gemeinsame Teiler der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ 1 ist, das heisst, dass diese Polynome *teilerfremd* sind], sind einfach die Nullstellen des Nennerpolynoms $Q(x)$; diese Punkte werden *Polstellen* [poles] der rationalen Funktion F genannt.

Als Beispiel betrachten wir die analytische Fortsetzung $A(z)$ der analytischen Funktion, die durch die geometrische Reihe

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

gegeben ist. Diese Reihe definiert eine analytische Funktion mit Definitionsbereich $\{x : |x| < 1\}$. In diesem Definitionsbereich stimmt diese Funktion mit der rationalen Funktion $\frac{1}{1-x}$ überein. Folglich ist ihre analytische Fortsetzung die rationale Funktion $\frac{1}{1-x}$, welche überall in der komplexen Ebene, ausgenommen bei ihrem Pol $x_0 = 1$, analytisch ist. Also dürfen wir schreiben:

$$A(x) = \frac{1}{1-x}.$$

3.3. Die z-Transformation

Jetzt endlich können wir definieren, was die z-Transformation ist. Die z-Transformierte des zeitdiskreten Signals $f[.]$ ist die analytische Fortsetzung $F(.)$ der analytischen Funktion, die durch die Laurentreihe

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] z^{-k} \quad (3.3.1)$$

definiert ist und der *Konvergenzbereich* (ROC: region of convergence) die Menge $\{z : r_2 < |z| < r_1\}$ wobei r_1 der Konvergenzradius der Potenzreihenkomponente in z der Laurentreihe und r_2 der Konvergenzradius der Potenzreihenkomponente in z^{-1} der Laurentreihe ist. Wenn $r_2 \geq r_1$ ist, dann existiert die z-Transformation von $f[.]$ nicht. Wenn $r_2 = 0$ ist, sagen wir einfach, dass die ROC die Menge $\{z : |z| < r_1\}$ ist. Es ist wichtig zu beachten, dass die ROC [Konvergenzbereich] eine Eigenschaft des zeitdiskreten Signals $f[.]$ und nicht eine Eigenschaft ihrer z-Transformierten $F(.)$ ist. Wir heben diese Tatsache hervor, indem wir $\text{ROC}(f[.])$ schreiben, um diesen Konvergenzbereich zu bezeichnen. Zum Beispiel sehen wir aus den Berechnungen, die wir im Abschnitt 3.1 durchgeführt haben, dass $u[.]$ und $-u[-. - 1]$ dieselbe z-Transformierte $\frac{z}{z-1}$ haben, aber dass

$$\text{ROC}(u[.]) = \{z : |z| > 1\}$$

und

$$\text{ROC}(-u[-. - 1]) = \{z : |z| < 1\}.$$

Wir erkennen, dass die Schnittmenge dieser zwei Konvergenzbereiche leer ist, was wir ebenso aus dem Eindeutigkeitssatz der analytischen Funktionen hätten folgern können.

Beispiel 3.3.1: Betrachte die rechtsseitige Exponentialfunktion $f[.]$, gegeben durch

$$f[k] = \alpha^k u[k], \quad (3.3.2)$$

wobei α jede beliebige komplexe Zahl sein kann. (3.3.2) in (3.3.1) eingesetzt, ergibt die Laurentreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k}, \quad (3.3.3)$$

welche gerade eine Potenzreihe in $y = z^{-1}$ ist. [Hier ist es passender, den Term für $k = 0$ eher als Teil der Potenzreihe in z^{-1} anstatt -- wie in (3.2.5) -- als Teil der Potenzreihe in z zu betrachten. Es sollte klar sein, dass man den Term für $k = 0$ als Teil einer der beiden Potenzreihen, in welche sich die Laurentreihe zerlegt, betrachten kann, ohne jegliche Änderung der obigen Theorie der Laurentreihen.] Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat die Reihe die folgenden Partialsummen, welche wir mit $F_n(z)$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \sum_{k=0}^n (\alpha z^{-1})^k \\ &= 1 + (\alpha z^{-1}) + (\alpha z^{-1})^2 + \dots + (\alpha z^{-1})^n, \quad |\alpha z^{-1}| < 1. \end{aligned}$$

Multiplizieren mit $1 - (\alpha z^{-1})$ ergibt

$$(1 - \alpha z^{-1})F_n(z) = 1 - (\alpha z^{-1})^{n+1}$$

und folglich, für $z \neq \alpha$,

$$F_n(z) = \frac{1 - (\alpha z^{-1})^{n+1}}{1 - \alpha z^{-1}}. \quad (3.3.4)$$

Wir sehen aus (3.3.4), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)$ dann und nur dann existiert, wenn $|\alpha z^{-1}| < 1$ oder gleichbedeutend, wenn $|z| > |\alpha|$ ist; in diesem Fall erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}. \quad (3.3.5)$$

Folglich ist die Laurentreihe (3.3.3) in ihrem Konvergenzbereich $\{z : |z| > |\alpha|\}$ identisch mit der rationalen Funktion $F(\cdot)$ mit $F(z) = z/(z - \alpha)$, welche wiederum in der ganzen komplexen Ebene, ausgenommen dem Punkt $z = \alpha$, analytisch ist. Es folgt aus dem Eindeutigkeitssatz der analytischen Funktionen, dass diese rationale Funktion $F(\cdot)$ tatsächlich die analytische Fortsetzung der Funktion ist, die durch die Laurentreihe (3.3.3) in ihrem Konvergenzbereich $\text{ROC}(f[\cdot]) = \{z : |z| > |\alpha|\}$ definiert ist. Aber es ist wichtig zu beachten, dass die Laurentreihe (3.3.3) die Werte der Funktion $F(\cdot)$ für z ausserhalb des Konvergenzbereichs *nicht* spezifiziert – es ist der Prozess der analytischen Fortsetzung, der die Funktion $F(z)$ für diejenigen z mit $|z| \leq |\alpha|$ (ausgenommen den Punkt $z = \alpha$) spezifiziert. Zusammenfassend haben wir in diesem Beispiel gezeigt, dass die rechtsseitige Exponentialfunktion $f[\cdot]$ in (3.3.2) ein komplexes zeitdiskretes Signal ist, dessen z -Transformierte die rationale Funktion $F(\cdot)$ ist, gegeben durch

$$F(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad (3.3.6)$$

für alle komplexen Zahlen ausgenommen $z = \alpha$ und dessen Konvergenzbereich

$$\text{ROC}(f[\cdot]) = \{z : |z| > |\alpha|\} \quad (3.3.7)$$

ist.

In den folgenden Abschnitten werden wir nicht immer so wählerisch mit der Notation sein, wie wir es im obigen Beispiel gewesen sind. Manchmal werden wir zum Beispiel solche Resultate wie diejenigen im obigen Beispiel wie folgt schreiben:

$$\mathcal{Z}\{\alpha^k u[k]\} = \frac{z}{z - \alpha} \quad (3.3.8)$$

und

$$\text{ROC}(\alpha^k u[k]) = \{z : |z| > |\alpha|\}. \quad (3.3.9)$$

Die Notation $\mathcal{Z}\{f[k]\}$ auf der linken Seite von (3.3.7) bezeichnet die z-Transformation der zeitdiskreten Funktion $f[.]$, für welche $f[k]$ so spezifiziert ist, und die Notation auf der rechten Seite bezeichnet die Funktion $F(.)$ für welche $F(z)$ so für alle z spezifiziert ist, dass dieser Ausdruck eine komplexe Zahl als Wert ergibt. Analog bezeichnet die Notation $\text{ROC}(f[k])$ den Konvergenzbereich der Laurentreihe, bestimmt durch die zeitdiskrete Funktion $f[.]$, für welche $f[k]$ so spezifiziert ist. Das sind natürlich *Missbräuche der Notation*, aber Missbräuche der Notation sind oft bequem – und nicht gefährlich, vorausgesetzt, man versteht *genau*, wie die Notation missbraucht wurde.

Zwei Laurentreihen, deren Konvergenzbereich eine nicht-leere Schnittmenge haben und welche gegen die gleiche analytische Funktion in dieser Schnittmenge konvergieren, müssen identische Ausdrücke haben. Folglich existiert die *inverse z-Transformation* immer – aber wir müssen etwas über den Konvergenzbereich (der Laurentreihe) des zeitdiskreten Signals wissen, bevor wir diese inverse z-Transformation berechnen können. Es folgt aus dem Eindeutigkeitssatz der analytischen Funktionen, dass es genügt, irgend eine Kurve (wie klein auch immer) zu kennen, die im Konvergenzbereich liegt. Weil aber der Konvergenzbereich der Laurentreihe immer die Form $\{z : r_2 < |z| < r_1\}$ hat, sehen wir, dass es zur Berechnung der inversen z-Transformation *genügt, irgendeinen Punkt z_0 im Konvergenzbereich zu kennen*, da wir dann wissen, dass der Kreis $\{z : |z| = |z_0|\}$ im Konvergenzbereich liegt. (Dies sollte dem Leser helfen zu verstehen, warum man $f[k]$ durch Integration von $\frac{1}{2\pi j} F(z)z^{k-1}$ entlang eines solchen Kreises berechnen kann, wie in den Übungen zu zeigen ist.)

3.4. Einige nützliche allgemeine Eigenschaften der z-Transformation

Wir entwickeln nun einige Eigenschaften der z-Transformation, die sehr nützlich in Anwendungen sind und für zeitdiskrete Signale jeden Typs (rechtsseitig, linksseitig, kausal etc.) gelten. Wir beginnen mit der fundamentalsten Eigenschaft, der Linearität.

Linearität der z-Transformation [Linearity]: Wenn $f_1[.]$ und $f_2[.]$ komplexe zeitdiskrete Signale mit den entsprechenden Laurentreihen $F_1(.)$ respektive $F_2(.)$ sind, deren Konvergenzbereiche eine nicht-leere Schnittmenge haben, und wenn c_1 und c_2 komplexe Zahlen sind, dann hat das komplexe zeitdiskrete Signal $f[.]$ mit

$$f[k] = c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k] \quad (3.4.1)$$

die z-Transformation gegeben durch

$$F(z) = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z) \quad (3.4.2)$$

mit dem Konvergenzbereich

$$\text{ROC}(f[.]) \supseteq \text{ROC}(f_1[.]) \cap \text{ROC}(f_2[.]). \quad (3.4.3)$$

In einfacher, aber ungenauer Notation können wir (3.4.1) und (3.4.2) zusammen als

$$z\{c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k]\} = c_1 z\{f_1[k]\} + c_2 z\{f_2[k]\} \quad (3.4.4)$$

schreiben, und (3.4.3) entsprechend als

$$\text{ROC}(c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k]) \supseteq \text{ROC}(f_1[k]) \cap \text{ROC}(f_2[k]). \quad (3.4.5)$$

Die Linearitätseigenschaft der z-Transformation folgt aus der einfachen Tatsache, dass, wenn zwei Laurentreihen an einem Punkt absolut konvergieren, ihre gliedweise Summe eine Laurentreihe ist, die ebenfalls absolut an diesem Punkt konvergiert, und der noch einfacheren Tatsache, dass gliedweise Multiplikation der Laurentreihe mit einer Konstanten ungleich null die Konvergenzeigenschaften der Reihe nicht verändert. (Multiplikation mit 0 gibt die triviale Laurentreihe, die absolut und überall gegen 0 konvergiert.) Es kann natürlich vorkommen, dass der Konvergenzbereich der Laurentreihe, die durch $f[.]$ bestimmt ist, grösser ist als die rechte Seite von (3.4.3). Ist zum Beispiel $c_1 = c_2$ und $f_2[k] = -f_1[k]$, dann ist $f[k] = 0$, so dass der Konvergenzbereich von $f[.]$ die ganze komplexe Ebene erfasst. Im letzten Abschnitt sahen wir jedoch, dass es normalerweise nicht wichtig ist, den ganzen Konvergenzbereich zu kennen, um die inverse z-Transformation zu berechnen, es genügt, einen einzigen Punkt im Konvergenzbereich der Laurentreihe, die durch das zeitdiskrete Signal bestimmt ist, zu kennen.

Zeitverschiebungs-Eigenschaft der z-Transformation [Time-Shift Property]: Für irgendeine ganze Zahl m , wenn

$$g[.] = f[. - m], \quad (3.4.6)$$

dann stehen die entsprechenden z-Transformationen $G(\cdot)$ und $F(\cdot)$ so in Beziehung, dass

$$G(z) = z^{-m}F(z). \quad (3.4.7)$$

Überdies ist

$$\text{ROC}(g[.]) = \text{ROC}(f[.]). \quad (3.4.8)$$

In einfacherer, aber ungenauer Notation, können wir die Zeitverschiebungs-Eigenschaft schreiben als

$$Z\{f[k - m]\} = z^{-m}Z\{f[k]\} \quad (3.4.9)$$

und

$$\text{ROC}\{f[k - m]\} = \text{ROC}\{f[k]\}. \quad (3.4.10)$$

Um diese Eigenschaft zu beweisen, beginnen wir mit

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k - m] z^{-k}, \end{aligned}$$

was durch Substitution von $i = k - m$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i] z^{-i-m} \\ &= z^{-m} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i] z^{-i} \\ &= z^{-m} F(z) \end{aligned}$$

ergibt. Dass $g[.]$ und $f[.]$ genau den gleichen Konvergenzbereich haben, folgt aus der Tatsache, dass z^{-m} eine triviale Laurentreihe ist, die überall konvergiert. Alternativ kann (3.4.8) als Folge von (3.2.2) und (3.2.4) gesehen werden zusammen mit den Tatsachen, dass

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f[k - m]|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f[k]|}$$

ist, was der Konvergenzradius r_2 der Potenzreihenkomponente in z^{-1} der Laurentreihe ist, und

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|f[-i - m]|} = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|f[-i]|},$$

was das Reziproke des Konvergenzradius der Potenzreihenkomponente in z der Laurentreihe ist.

Frequenzskalierungs-Eigenschaft der z-Transformation [Frequency-Scaling Property]:
 Wenn α eine komplexe Zahl ungleich null und $f[.]$ eine zeitdiskrete Funktion mit der z-Transformierten $F(.)$ und der $\text{ROC}(f[.]) = \{z: r_2 < |z| < r_1\}$ ist, dann hat die zeitdiskrete Funktion $g[.]$ mit

$$g[k] = \alpha^k f[k] \quad (3.4.11)$$

die z-Transformierte $G(.)$ mit

$$G(z) = F\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad (3.4.12)$$

und

$$\text{ROC}(g[.]) = \{z: r_2 \cdot |\alpha| < |z| < r_1 \cdot |\alpha|\}. \quad (3.4.13)$$

Um diese Eigenschaft zu beweisen, beginnen wir mit

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k f[k] z^{-k}, \end{aligned}$$

was mit Substitution von $y = z/\alpha$ die Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] y^{-k}$$

ergibt. Das ist gerade die Laurentreihe $F(y)$ bestimmt durch $f[.]$, welche nach Voraussetzung den Konvergenzbereich $\{y: r_2 < |y| < r_1\}$ hat. Folglich ist $G(z) = F(z/\alpha)$ und der Konvergenzradius ist so, wie in (3.4.13) behauptet.

"Multiplikation mit k"-Eigenschaft der z-Transformation ["Multiplication-by-k" Property]:
 Gilt für $f[.]$ und $g[.]$ die Beziehung

$$g[k] = k \cdot f[k], \quad (3.4.14)$$

dann haben ihre z-Transformierten $F(.)$ und $G(.)$ die Beziehung

$$G(z) = -z \frac{dF(z)}{dz}. \quad (3.4.15)$$

Überdies ist

$$\text{ROC}(g[.]) = \text{ROC}(f[.]). \quad (3.4.16)$$

Um diese Eigenschaft zu beweisen, nutzen wir die Tatsache, dass die Ableitung einer Laurentreihe in ihrem Konvergenzbereich durch gliedweise Differentiation berechnet wer-

den kann und diese neue Laurentreihe denselben Konvergenzbereich wie die alte Laurentreihe hat. Wir gehen aus von

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] z^{-k}$$

und erhalten die Ableitung $F'(z)$ zu

$$F'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-k) f[k] z^{-k-1}.$$

Multiplikation mit $-z$ [was den Konvergenzbereich nicht ändert, da $-z$ eine (triviale) Laurentreihe ist, die überall konvergiert] gibt

$$-z F'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k f[k] z^{-k}.$$

Wir erkennen auf der rechten Seite die Laurentreihe für die zeitdiskrete Funktion $g[\cdot]$ mit $g[k] = k \cdot f[k]$.

Zeitumkehrungs-Eigenschaft der z-Transformation [Time-Reversal Property]: Wenn $f[\cdot]$ und $g[\cdot]$ die Beziehung

$$g[k] = f[-k] \quad (3.4.17)$$

haben, und wenn

$$\text{ROC}(f[\cdot]) = \{z: r_2 < |z| < r_1\},$$

dann haben die z-Transformierten $F(z)$ und $G(z)$ die Beziehung

$$G(z) = F\left(\frac{1}{z}\right)$$

und

$$\text{ROC}(g[\cdot]) = \left\{z: \frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}\right\}. \quad (3.4.18)$$

Der Beweis dieser Eigenschaft ist ziemlich ähnlich wie der Beweis der Frequenz-skalierungseigenschaft; wir überlassen diesen Beweis dem Leser.

3.5. Einige z-Transformations-Eigenschaften rechtsseitiger und kausaler Signale

Wir nehmen an, dass $f[.]$ ein *rechtsseitiges* Signal ist, das heisst, wir nehmen an, dass es eine ganze Zahl b gibt so, dass $f[k] = 0$ für alle ganzen Zahlen $k < b$. Dann ist die der Funktion $f[.]$ entsprechende Laurentreihe

$$F(z) = \sum_{k=b}^{\infty} f[k]z^{-k} \quad (3.5.1)$$

Die Glieder in $F(z)$ bilden ein Polynom für positive Potenzen von z , das heisst für $k < 0$ (vielleicht das Null-Polynom), und folglich konvergiert die Potenzreihenkomponente in z der Laurentreihe immer absolut. Also konvergiert die Laurentreihe (3.5.1) genau dann, wenn ihre Potenzreihenkomponente in z^{-1} konvergiert. Die folgende Charakterisierung des Konvergenzradius der Laurentreihe (3.5.1) folgt nun aus dem Cauchy-Hadamard Theorem von Abschnitt 3.2.

Konvergenzbereich: Der Konvergenzbereich $\text{ROC}(f[.])$ der Laurentreihe einer *rechtsseitigen* zeitdiskreten Funktion $f[.]$ (und folglich auch einer *kausalen* zeitdiskreten Funktion) ist entweder leer (falls die Laurentreihe für keine komplexe Zahl z konvergiert) oder das *Äussere eines Kreises mit einem gewissen Radius r* .

Der exakte Wert von r interessiert uns in der Regel nicht. Um die z -Transformation $F(.)$ eines *rechtsseitigen Signals* $f[.]$ zu invertieren, genügt es zu wissen, dass *jedes z mit genügend grossem $|z|$ im $\text{ROC}(f[.])$ liegt*.

Falls $f[.]$ ein *kausales Signal* ist, das heisst, falls $f[k] = 0$ für alle ganzen Zahlen $k < 0$, dann wird die Laurentreihe (3.3.1)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k} \quad (3.5.2)$$

Beachtet man, dass z^{-k} für alle positiven k verschwindet, wenn $|z| \rightarrow \infty$ geht, kann man die folgende einfache, aber oft nützliche Eigenschaft von (3.5.2) ableiten.

Anfangswert-Eigenschaft für kausale Signale [Initial-Value Property for Causal Signals]: Wenn $F(.)$ die z -Transformierte einer kausalen zeitdiskreten Funktion $f[.]$ ist, dann ist

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = f[0] \quad (3.5.3)$$

Als triviales Beispiel dieser Eigenschaft nehmen wir $F(z) = \frac{z}{z-1}$, die z -Transformierte von $u[.]$, und beachten, dass

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} = 1 = u[0] \quad \text{ist.}$$

Als weniger triviales Beispiel betrachten wir $F(z) = \frac{2z^2}{z^2 - 3z + 2}$ und stellen fest, dass für das kausale Signal $f[.]$ mit dieser z-Transformierten

$$f[0] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^2 - 3z + 2} = 2$$

ist, wie der Leser selbst kontrollieren kann.

Unter dem *kausalen Teil* [causal part] eines zeitdiskreten Signals $f[.]$ verstehen wir das Signal

$$f_c[.] = f[.]u[.].$$

Damit wird

$$f_c[k] = f[k]u[k] = \begin{cases} f[k], & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

was die Nomenklatur "kausaler Teil" erklärt. Nun nehmen wir an, dass $f[.]$ kausal ist und m eine positive, ganze Zahl ist. Dann ist $g[.] = f[. + m]$ die um m Zeiteinheiten *nach links verschobene Funktion* von $f[.]$ und ist folglich im allgemeinen nicht kausal. Dennoch können wir die Zeitverschiebungs-Eigenschaft der z-Transformation anwenden, um

$$G(z) = z^m F(z)$$

zu finden. Aber der kausale Teil von $g[.]$, $g_c[.] = g[.]u[.] = f[. + m]u[.]$ hat die Laurentreihe

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k+m]z^{-k} \\ &= z^m \sum_{k=0}^{\infty} f[k+m]z^{-(k+m)} = z^m \sum_{k=m}^{\infty} f[k]z^{-k} \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f[k]z^{-k} \right] \\ &= G(z) - z^m \sum_{k=0}^{m-1} f[k]z^{-k}, \end{aligned}$$

wobei wir beim zweitletzten Schritt Gebrauch von (3.5.2) gemacht haben. Wir fassen zusammen in der folgenden Eigenschaft, die man zur Lösung von linearen Differenzgleichungen mit Anfangsbedingungen brauchen kann.

Eigenschaft des kausalen Teils verschobener kausaler Signale [Causal-Part Property of Shifted Causal Signals]: Wenn $f[.]$ ein kausales zeitdiskretes Signal und m eine positive, ganze Zahl ist, dann ist (in ungenauer, aber einsichtsvoller Notation)

$$Z(f[k+m] u[k]) = z^m Z(f[k]) - z^m \sum_{i=0}^{m-1} f[i] z^{-i} \quad (3.5.4)$$

und

$$\text{ROC}(f[k+m] u[k]) = \text{ROC}(f[k]). \quad (3.5.5)$$

Der wachsame Leser wird merken, dass wir die Gleichheit der Konvergenzbereiche in (3.5.5) nicht bewiesen haben, aber es sollte keine Schwierigkeiten bereiten, den einfachen Beweis selbst zu führen.

Kapitel 4

Lineare zeitdiskrete Systeme

4.1. Definition eines linearen zeitdiskreten Systems

Wir sind nun bereit Systeme zur Verarbeitung zeitdiskreter Signale zu betrachten. Ein *lineares zeitdiskretes System* [linear discrete-time system] oder *LDS* ist

- (i) ein System mit einem Eingang und einem Ausgang
- (ii) linear
- (iii) zeitinvariant.

Wir diskutieren nun im Detail, was mit den drei Aspekten dieser Definition gemeint ist.

Ein LDS ist ein *System mit einem Eingang und einem Ausgang*. Der Eingang ist ein einziges (komplexes) zeitdiskretes Signal (im Gegensatz zu einem zeitdiskreten Vektor, dessen Komponenten zeitdiskrete Signale sind). Der Ausgang ist auch ein einziges (komplexes) zeitdiskretes Signal. Diese Eigenschaft eines LDS ist in Fig. 4.1.1 angegeben, wo wir den Eingang mit $x[.]$ und den Ausgang mit $y[.]$ bezeichnet haben.

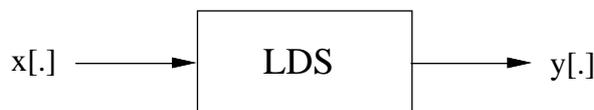


Fig. 4.1.1: Ein LDS ist ein System mit einem Eingang und einem Ausgang.

Ein LDS ist *linear*. Wenn $y_i[.]$ die Antwort des Systems auf $x_i[.]$ ist (c_i ist eine komplexe Zahl), bedeutet Linearität, dass das Eingangssignal

$$x[.] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i x_i[.] \quad (4.1.1)$$

die Antwort

$$y[.] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i y_i[.] \quad (4.1.2)$$

zur Folge hat, vorausgesetzt, dass die unendlichen Summen in (4.1.1) und (4.1.2) "sinnvoll" sind, das heisst, dass für jede ganze Zahl k die unendlichen Summen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i x_i[k] = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x_i[k] + \sum_{i=1}^{+\infty} c_{-i} x_{-i}[k] \quad (4.1.3)$$

und

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i y_i[k] = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i y_i[k] + \sum_{i=1}^{+\infty} c_{-i} y_{-i}[k], \quad (4.1.4)$$

ungeachtet der Reihenfolge, wie diese unendlichen Summen gebildet werden, gegen die gleichen Werte $x[k]$ und $y[k]$ für dieses k konvergieren. Wir erinnern uns an unsere Diskussion über Reihen in Abschnitt 3.2, in der gezeigt wurde, dass nur absolut konvergente Reihen die Eigenschaft der Invarianz bezüglich des Umordnens haben.

Zeitinvarianz eines LDS bedeutet, wenn $y[.]$ die Antwort auf $x[.]$ ist, dass das Eingangssignal $x[.-m]$ das Ausgangssignal $y[.-m]$ ergibt. Mit anderen Worten: Eine Zeitverschiebung des Eingangssignals hat eine entsprechende Zeitverschiebung des Ausgangssignals zur Folge.

Wir halten eine einfache Konsequenz unserer Definition eines LDS fest: Wenn wir in (4.1.1) $c_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ setzen, ergibt das Nullsignal $x[.] = \mathbf{0}$ immer das Nullsignal $y[.] = \mathbf{0}$.

4.2. Kronecker-Delta-Antwort und Faltung

Unter der *Kronecker-Delta-Antwort* [Kronecker-delta response] eines LDS versteht man die Antwort $h[.]$ auf ein Kronecker-Delta-Eingangssignal $\delta[.]$. Aus der Zeitinvarianz des LDS folgt, dass das Eingangssignal $\delta[.-m]$ die Antwort $h[.-m]$ ergibt. Wir zeigen nun, dass es genügt, $h[.]$ zu kennen, um die Antwort eines LDS auf ein beliebiges Eingangssignal zu bestimmen.

Wir beachten zuerst, dass das Eingangssignal $x[.]$ als

$$x[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \delta[.-m] \quad (4.2.1)$$

geschrieben werden kann. Das folgt aus der Tatsache, dass

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \delta[k-m] = x[k]$$

ist, da $\delta[k-m]$ für alle m gleich null ist, ausgenommen für $m = k$, wo der Wert 1 ist. Aber $h[.-m]$ ist die Antwort auf $\delta[.-m]$ so, dass (4.2.1) und die Linearitätseigenschaft uns sagen, dass die Antwort auf $x[.]$ das Signal

$$y[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[.-m]. \quad (4.2.2)$$

ist. Insbesondere finden wir

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[k-m], \quad (4.2.3)$$

vorausgesetzt natürlich, dass die unendliche Summe absolut konvergiert. Die Summe in (4.2.3) wird *Faltungssumme* [convolution sum] genannt und ist vielleicht der wichtigste Ausdruck in der Theorie der linearen Systeme. Wenn wir einen Wechsel des Summierungsindex $i = k - m$ in (4.2.3) vornehmen, finden wir

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{i=-\infty}^{-\infty} x[k-i]h[i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]x[k-i], \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, woraus

$$y[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] x[.-m] \quad (4.2.4)$$

folgt. Wir folgern, dass *sich bei Vertauschung von Eingangssignal und Kronecker-Delta-Antwort das Ausgangssignal nicht verändert*, was eine ziemlich bemerkenswerte Eigenschaft solcher Systeme ist. Als Abkürzung für die Gleichung (4.2.2) werden wir

$$y[.] = x[.] * h[.] \quad (4.2.5)$$

schreiben und $y[.]$ die *Faltung* [convolution] von $x[.]$ und $h[.]$ nennen. Wir haben gerade gesehen, dass

$$x[.] * h[.] = h[.] * x[.] \quad (4.2.6)$$

ist, die Faltungsoperation ist also *kommutativ*.

4.3. Kausalität und Stabilität

Man sagt, dass ein LDS *kausal* ist, wenn die Antwort $y[k]$, für jede ganze Zahl k , zur Zeit k durch die Eingangswerte $x[i]$ für $i \leq k$ vollständig bestimmt ist; das heisst, die Zukunft des Eingangssignals hat keinen Effekt auf den Ausgang. Eine notwendige Bedingung für Kausalität ist $h[i] = 0$ für $i < 0$, da das LDS sonst auf das Signal $\delta[.]$ eine Antwort ungleich null zu einem negativen Zeitpunkt i geben würde. Diese Bedingung ist auch ausreichend, wie man sieht, wenn man $h[m] = 0$ für $m < 0$ annimmt. Damit wird (4.2.4) zu

$$y[.] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] x[.-m].$$

Dies ergibt

$$y[k] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] x[k-m]$$

und wir sehen in der Tat, dass $y[k]$ vollständig durch die Eingangswerte $x[i]$ für $i \leq k$ bestimmt ist. Wir haben soeben die folgende wichtige Eigenschaft eines LDS bewiesen:

Kausalität eines LDS. Ein LDS ist genau dann kausal, wenn für seine Kronecker-Delta-Antwort gilt: $h[k] = 0$ für $k < 0$; das heisst wenn $h[.]$ ein "kausales" zeitdiskretes Signal ist, wie es in Abschnitt 1.4 definiert ist.

Man sagt, dass ein LDS *BIBO-stabil* [bounded-input bounded-output stable (BIBO-stable)] ist, wenn es für jede positive Zahl b_1 eine positive Zahl b_2 gibt, so dass für jedes Eingangssignal $x[.]$ mit

$$|x[k]| \leq b_1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

für das Ausgangssignal $y[.]$ gilt:

$$|y[k]| \leq b_2 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir beweisen nun folgende wichtige Eigenschaft eines LDS:

BIBO-Stabilität eines LDS. Ein LDS ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Terme seiner Kronecker-Delta-Antwort eine absolut konvergente unendliche Summe bilden:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty. \quad (4.3.1)$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir $|x[k]| \leq b_1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann ergibt (4.2.4)

$$\begin{aligned} |y[k]| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] x[k-m] \right| \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| |x[k-m]| \\ &\leq b_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]|. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Folglich konvergiert die unendliche Summe gegen eine nichtnegative Zahl c , wenn (4.3.1) gilt. Wir können $b_2 = c \cdot b_1$ wählen und folglich von (4.3.2) ableiten, dass das LDS BIBO-stabil ist.

Wenn wir umgekehrt annehmen, dass (4.3.1) nicht gilt, das heisst

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty,$$

dann können wir $b_1 = 1$ nehmen und das Eingangssignal, das für alle $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$x[k] = \begin{cases} \frac{h^*[-k]}{|h[-k]|} & \text{wenn } h[-k] \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } h[-k] = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

definiert ist, betrachten.

Aus $|h^*[-k]| = |h[-k]|$ folgt $|x[k]| \leq 1 = b_1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Aber wenn wir (4.3.3) in (4.2.2) einsetzen, zeigt sich, dass

$$\begin{aligned} |y[0]| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[-m] \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{m=-\infty \\ h[-m] \neq 0}}^{+\infty} \frac{h^*[-m] h[-m]}{|h[-m]|} \right| \\ &= \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[-m]| \right| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|, \end{aligned}$$

welches nach Voraussetzung gegen $+\infty$ divergiert. Folglich gibt es keine positive Zahl b_2 , für welche $|y[0]| \leq b_2$ ist und damit ist das LDS nicht BIBO-stabil.

In Aufgabe 4.3 definierten wir ein "*stabiles*" zeitdiskretes Signal als ein Signal, dessen ROC($f[\cdot]$) den Einheitskreis ($\{z : |z| = 1\}$) enthält. Dann konvergiert die Laurentreihe (3.3.1) absolut für $|z| = 1$, das heisst, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f[k]| < \infty \quad (4.3.4)$$

ist. Wenn also $h[\cdot]$ stabil ist, dann ist das LDS mit dieser Kronecker-Delta-Antwort BIBO-stabil. Das Umgekehrte trifft fast, aber nicht ganz zu. Es ist möglich, dass (4.3.4) für ein $f[\cdot]$ gilt, für welches der Einheitskreis die Grenze seines Konvergenzbereichs darstellt, so dass $f[\cdot]$ gar kein stabiles Signal ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f[\cdot]$ mit $f[k] = \frac{1}{k^2}$ für $k > 0$ und $f[k] = 0$ für $k \leq 0$. Ein LDS mit $h[\cdot] = f[\cdot]$ für dieses $f[\cdot]$ ist BIBO-stabil, aber $h[\cdot]$ ist kein stabiles Signal. Es ist auch möglich, ein $f[\cdot]$ zu haben, für welches der Einheitskreis die äussere Grenze seines Konvergenzbereichs ist, aber für welches (4.3.4) *nicht* gilt; ein einfaches Beispiel für das ist die Funktion $f[\cdot] = u[\cdot]$. Ein LDS mit $h[\cdot] = u[\cdot]$ ist nicht BIBO-stabil. Es folgt jedoch aus den Überlegungen in Aufgabe 6.3, dass, wenn $h[\cdot]$ eine rationale z-Transformierte hat, (4.3.1) genau dann erfüllt ist, wenn die Laurentreihe (3.3.1) für $h[\cdot]$ den Einheitskreis in ihrem Konvergenzbereich enthält. Wir fassen zusammen:

Wenn die Kronecker-Delta-Antwort $h[\cdot]$ eines LDS ein stabiles Signal ist, dann ist das LDS BIBO-stabil. Umgekehrt, wenn $h[\cdot]$ eine rationale z-Transformierte hat und das LDS BIBO-stabil ist, dann ist $h[\cdot]$ ein stabiles Signal.

4.4. Übertragungsfunktion und Faltung

Die z-Transformierte $H(\cdot)$ der Kronecker-Delta-Antwort $h[\cdot]$ wird, wenn sie existiert, *Übertragungsfunktion* [transfer function] des LDS genannt. In Abschnitt 4.2 sahen wir, dass es genügt, $h[\cdot]$ zu kennen, um die Antwort $y[\cdot]$ des LDS auf jedes Eingangssignal $x[\cdot]$ zu berechnen. Somit genügt es, $H(\cdot)$ zusammen mit wenigstens einem Punkt in der $\text{ROC}(h[\cdot])$ zu kennen, um eine solche Antwort zu berechnen, da wir (wenn wir es wünschen) mit dieser Information $h[\cdot]$ mittels der inversen z-Transformation berechnen könnten. Jedoch zeigen wir nun, dass die Übertragungsfunktion gebraucht werden kann, um die Antwort des LDS auf eine normalerweise viel einfachere und einsichtigere Art zu berechnen als durch die Faltung von $h[\cdot]$ und $x[\cdot]$.

Wir beginnen damit, dass die Antwort $y[\cdot]$ des LDS auf $x[\cdot]$ nach (4.2.2) als

$$y[\cdot] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[\cdot - m]$$

geschrieben werden kann: $y[\cdot]$ wird dabei durch eine gewichtete Summe zeitverschobener Signale $h[\cdot - m]$ ausgedrückt. Aber die z-Transformierte von $h[\cdot - m]$ ist gemäss der Zeitverschiebungseigenschaft $z^{-m}H(z)$. Somit impliziert die Linearität der z-Transformation, dass

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m}H(z) \\ &= H(z) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m} \\ &= H(z)X(z). \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Dies gilt für diejenigen z , für welche beide unendlichen Summen absolut konvergieren, da wir ja angenommen haben, dass $H(z)$ existiert. Die Laurentreihe für $y[\cdot]$ ist also das Produkt der Laurentreihe für $h[\cdot]$ und der Laurentreihe für $x[\cdot]$. Somit folgt, wenn $\text{ROC}(h[\cdot]) \cap \text{ROC}(x[\cdot]) \neq \emptyset$, dass die z-Transformierte von $y[\cdot]$ das Produkt der z-Transformierten von $h[\cdot]$ und der z-Transformierten von $x[\cdot]$ für alle z im gemeinsamen Konvergenzbereich der Laurentreihen für $h[\cdot]$ und $x[\cdot]$ ist. Aber das Produkt zweier analytischer Funktionen ist auch eine analytische Funktion und folglich ist die z-Transformierte $Y(z)$ von $y[\cdot]$ das Produkt von $H(z)$ und $X(z)$ für alle z , wie aus (4.4.1) und der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung folgt. Wir haben damit die folgende fundamentale Eigenschaft bewiesen:

Faltungseigenschaft der z-Transformation: Wenn

$$y[.] = h[.] * x[.]$$

und

$$\text{ROC}(h[.]) \cap \text{ROC}(x[.]) \neq \emptyset,$$

dann haben die z-Transformierten von $y[.]$, $x[.]$ und $h[.]$ folgende Beziehung

$$Y(.) = H(.) \cdot X(.)$$

und

$$\text{ROC}(y[.]) \supseteq \text{ROC}(h[.]) \cap \text{ROC}(x[.]).$$

Man beschreibt in der Regel die Faltungseigenschaft der z-Transformation, indem man sagt, dass die *Faltung im Zeitbereich der Multiplikation im Frequenzbereich entspricht*. Man muss natürlich sicher sein, dass die Schnittmenge der Konvergenzbereiche der (Laurentreihen für die) zwei Signale, die zu falten sind, nicht leer sind, bevor man diese "Äquivalenz" anwenden kann. Im häufig auftretenden Fall, wo beide Signale rechtsseitig sind, ist diese Bedingung der Konvergenzbereiche automatisch erfüllt – was vielleicht erklärt, wieso diese Bedingung oft in der Literatur vergessen wird.

Wenn der Konvergenzbereich von (der Laurentreihe für) $h[.]$ den Einheitskreis $\{z : |z| = 1\} = \{e^{j\Omega} : -\pi < \Omega \leq \pi\}$ einschliesst, dann kann die Übertragungsfunktion, auf dem Einheitskreis ausgewertet werden: $H(e^{j\Omega})$, in Funktion von Ω für $-\pi < \Omega \leq \pi$ wird *Frequenzgang* [frequency response] des LDS genannt. Wir erinnern uns daran, dass wir in Aufgabe 4.3 eine "stabile" zeitdiskrete Funktion als eine Funktion definiert haben, deren $\text{ROC}(f[.])$ den Einheitskreis enthält. Folglich ist der Frequenzgang $H(e^{j\Omega})$ für diejenigen und nur für diejenigen LDS definiert, deren Kronecker-Delta-Antwort $h[.]$ eine stabile zeitdiskrete Funktion ist. Der Frequenzgang $H(e^{j\Omega})$ spielt eine wichtige Rolle in Filterproblemen.

Kapitel 5

Stochastische Signale in linearen zeitdiskreten Systemen

5.1. Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir die Antwort eines LDS auf ein stochastisches Signal. Die Situation, die wir untersuchen wollen, ist in Fig. 5.1.1 illustriert. Das Eingangssignal in dieser Abbildung ist ein zeitdiskreter stochastischer Prozess $X[.]$, und das Ausgangssignal ist ein anderer zeitdiskreter stochastischer Prozess $Y[.]$. Das bedeutet, dass man bei jeder Durchführung des zugrundeliegenden Zufallsexperiments ein reelles zeitdiskretes Signal $x[.]$ als Realisierung des stochastischen Prozesses $X[.]$ erhält; dieses Eingangssignal $x[.]$ bewirkt, dass das System mit einem reellen zeitdiskreten Signal $y[.]$ antwortet, welches die Realisierung des stochastischen Prozesses $Y[.]$ ist. Die dabei auftretenden speziellen Ein- und Ausgangssignale $x[.]$ und $y[.]$ stehen durch die Faltungssumme (4.2.2) in Beziehung:

$$y[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[. - m], \quad (5.1.1)$$

wobei $h[.]$ die Kronecker-Delta-Antwort des LDS ist. [Unsere Forderung, dass sowohl $x[.]$ als auch $y[.]$ *reelle* zeitdiskrete Signale seien, bedingt dass $h[.]$ eine *reelle* zeitdiskrete Funktion ist, wie wir es durchwegs in diesem Kapitel annehmen werden.] Um hervorzuheben, dass (5.1.1) für beliebige zufällige Realisierungen $x[.]$ und $y[.]$ von $X[.]$ und $Y[.]$ gilt, wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, schreiben wir

$$Y[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[m] h[. - m] \quad (5.1.2)$$

oder, gleichwertig,

$$Y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[m] h[k - m], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.1.3)$$



Fig. 5.1.1: Ein stochastisches Eingangssignal $X[.]$ für ein LDS erzeugt ein stochastisches Ausgangssignal $Y[.]$.

Aus (5.1.3) sehen wir, dass $Y[k]$ eine Zufallsgrösse ist, welche gleich einer unendlichen Summe von Zufallsgrössen des stochastischen Prozesses $X[.]$, gewichtet mit der Kronecker-Delta-Antwort, ist. Wenn wir das Zufallsexperiment durchführen, ist die Realisierung $y[k]$ der Zufallsgrösse $Y[k]$ zur Zeit k bestimmt durch

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[k - m],$$

wobei $x[.]$ die Realisierung des stochastischen Prozesses $X[.]$ ist.

Weil wir nur für einen trivialen stochastischen Prozess $X[.]$ im voraus wüssten, welche Realisierung $x[.]$ auftreten würde, ist es klar, dass wir im allgemeinen nicht im voraus wissen, welche Realisierung $y[.]$ von $Y[.]$ auftreten wird. Wir können jedoch hoffen, von der Tatsache Gebrauch machen zu können, dass der stochastische Eingangsprozess des LDS den Ausgangsprozess gemäss (5.1.2) [oder (5.1.3)] bestimmt, so dass wir die Statistik des stochastischen Ausgangssignals $Y[.]$ aus der Statistik des Eingangssignals $X[.]$ berechnen können. Dies ist tatsächlich möglich, allerdings nur für spezielle Typen von stochastischen Eingangssignalen, die aber glücklicherweise zufällig diejenigen Typen sind, die man am häufigsten in Anwendungen antrifft. Wir führen diese speziellen Typen von stochastischen Prozessen im nächsten Abschnitt ein.

5.2. Stationäre und schwach stationäre stochastische Prozesse

Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess wird *stationär* [stationary] genannt, wenn für jede positive ganze Zahl n und jede ganze Zahl i die Zufallsvektoren $(X[0], X[1], \dots, X[n-1])$ und $(X[i], X[i+1], \dots, X[i+n-1])$ genau die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte haben. Mit anderen Worten, wenn man den stochastischen Prozess durch ein Zeitfenster der Länge n beobachtet, dann hängt die *Statistik*, die man beobachtet, nicht davon ab, wo das Fenster sich auf der Zeitachse befindet. Das einfachste Beispiel eines stationären stochastischen Prozesses ist ein stochastischer Prozess $X[.]$, dessen Komponenten *unabhängige und identisch verteilte* [independent and identically distributed (i.i.d.)] Zufallsgrössen sind. Man bezeichnet einen solchen Prozess als einen *i.i.d. Prozess*. Ein i.i.d. Prozess ist statistisch vollständig durch eine einzige Wahrscheinlichkeitsdichte für eine einzige Zufallsgrösse, zum Beispiel $X[0]$, beschrieben, weil alle Zufallsgrössen $X[k]$, $k \in \mathbb{Z}$, diese gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte haben und unabhängig voneinander sind. Man sieht, dass ein stationärer stochastischer Prozess ein stochastischer Prozess ist, dessen statistische Eigenschaften *alle* zeitinvariant sind. Für viele Anwendungen genügt es zu wissen, dass nur gewisse Statistiken zeitinvariant sind. Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess $X[.]$ wird *schwach stationär* [weakly stationary, wide-sense stationary] genannt, wenn sowohl $E[X[i]]$ als auch $E[X[i+k] \cdot X[i]]$, für alle $k \in \mathbb{Z}$ unabhängig von i ($i \in \mathbb{Z}$) sind. Wenn $X[.]$ schwach stationär ist, dann schreiben wir

$$m_x = E[X[i]] \quad (\text{alle } i \in \mathbb{Z}) \quad (5.2.1)$$

für den Mittelwert [mean] m_x des schwach stationären stochastischen Prozesses. Mit

$$R_x[k] = E[X[i+k]X[i]] \quad (\text{alle } i \in \mathbb{Z}) \quad (5.2.2)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, definieren wir eine zeitdiskrete Funktion, die man *Autokorrelationsfunktion* [autocorrelation function] des schwach stationären Prozesses nennt. Natürlich ist ein stochastischer Prozess, der stationär ist, auch schwach stationär, aber das Umgekehrte trifft im allgemeinen nicht zu. Aus (5.2.2) erhalten wir für einen schwach stationären Prozess $X[.]$

$$R_x[0] = E[X^2[i]] \quad (\text{alle } i \in \mathbb{Z}).$$

$R_x[0]$ ist die *Durchschnittsleistung* des Prozesses zu jedem Zeitpunkt.

Zudem erhalten wir mit (5.2.2)

$$\begin{aligned} R_x[-k] &= E[X[i-k]X[i]] \\ &= E[X[i]X[i-k]]. \end{aligned}$$

Wenn wir $j = i - k$ setzen, haben wir

$$\begin{aligned} R_x[-k] &= E[X[j+k]X[j]] \\ &= R_x[k]. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Gleichung (5.2.4) zeigt, dass die Autokorrelationsfunktion immer eine *gerade* Funktion der Zeit ist. Wir entnehmen (5.2.4) auch, dass $R_x[.]$ im allgemeinen ein zweiseitiges Signal ist.

Im allgemeinen können wir nicht hoffen, dass wir die z-Transformierte einer einzelnen Realisierung eines schwach stationären stochastischen Prozesses finden können, geschweige denn die z-Transformierte aller möglichen Realisierungen dieses Prozesses. Die Autokorrelationsfunktion eines schwach stationären stochastischen Prozesses ist jedoch eine einzige zeitdiskrete Funktion und verhält sich (in den meisten Anwendungen) so, dass wir ihre z-Transformierte berechnen können. Wir werden die z-Transformierte von $R_x[.]$ mit $S_x(.)$ [oder mit $S_x(z)$, wenn wir ungenauer mit der Notation sind] *kennzeichnen*, aber wir verschieben es, $S_x(.)$ einen Namen zu geben, bis wir die physikalische Bedeutung dieser Grösse kennen.

Ein stochastischer Prozess $X[.]$ wird *weisses Rauschen mit Leistung* σ^2 genannt, falls $X[.]$ schwach stationär ist und

$$m_x = 0 \quad (5.2.5a)$$

und

$$R_x[.] = \sigma^2 \cdot \delta[.] \quad (5.2.5b)$$

gilt, wobei σ irgendeine positive reelle Zahl ist. Es ist wichtig zu beachten, dass ein weisses Rauschen nicht "Rauschen" im intuitiven Sinn sein muss, das heisst, dass es nicht die unerwünschte Komponente eines empfangenen Signals sein muss. Solches "Rauschen" ist tatsächlich oft weisses Rauschen, aber das übermittelte Signal, das uns interessiert, kann

ebenfalls weisses Rauschen sein. Für weisses Rauschen $X[.]$ mit Leistung σ^2 erhalten wir für die z-Transformierte von $R_X[.]$ einfach

$$S_X(z) = \sigma^2, \quad \text{alle } z \in \mathbb{C}. \quad (5.2.6)$$

5.3. Antwort eines LDS auf ein schwach stationäres stochastisches Signal

Wir betrachten nun die Situation in Fig. 5.1.1 genauer, wenn das Eingangssignal $X[.]$ des LDS ein schwach stationärer stochastischer Prozess ist. Eine naheliegende Frage ist, ob das Ausgangssignal $Y[.]$ auch ein schwach stationärer stochastischer Prozess ist. Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir zuerst den Mittelwert $E[Y[k]]$ des Ausgangssignals. Zu diesem Zwecke ist es angebracht, die Faltungssumme (5.1.2) in der alternativen Form

$$Y[.] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[. - m] h[m] \quad (5.3.1)$$

neu zu schreiben, oder gleichbedeutend,

$$Y[i] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[i - m] h[m], \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (5.3.2)$$

Wenn wir den Erwartungswert nehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} E[Y[i]] &= E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[i - m] h[m]\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E[X[i - m]] h[m], \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

wobei wir die Linearität des Erwartungswertes (siehe Abschnitt 2.4) ausgenützt haben. [Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass (2.4.8) die Vertauschung der Reihenfolge von Erwartungswert und Summation tatsächlich nur gerechtfertigt ist, wenn die Summe endlich ist, das heisst, wenn die Kronecker-Delta-Antwort $h[.]$ des LDS nur endlich viele Komponenten ungleich null enthält. Im allgemeinen Fall ist diese Vertauschung nur gerechtfertigt, wenn die unendliche Summe $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]$ absolut konvergiert. Ab jetzt werden wir uns in diesem Kapitel nicht um solche mathematischen Feinheiten kümmern und werden stillschweigend annehmen, dass wir immer die absolute Konvergenz haben, die es braucht, um die Vertauschung der Reihenfolge von Erwartungswert und unendlicher Summe zu rechtfertigen.] Weil $X[.]$ schwach stationär ist, können wir (5.2.1) in (5.3.3) einsetzen, um

$$E[Y[i]] = m_X \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] \quad (5.3.4)$$

zu erhalten, was tatsächlich unabhängig von i ist.

Um die Frage zu beantworten, ob $Y[.]$ schwach stationär ist, bleibt uns noch zu zeigen, dass auch $E[Y[i+k] \cdot Y[i]]$ unabhängig von i ist. Vorher jedoch werden wir eine weitere

Definition, die es uns erlaubt, eine andere wichtige Eigenschaft von $X[.]$ und $Y[.]$ zu zeigen, einführen.

Zwei stochastische Prozesse $X[.]$ und $Y[.]$ werden *gemeinsam schwach stationär* [jointly weakly stationary] genannt, wenn sowohl $X[.]$ als auch $Y[.]$ schwach stationär sind und ausserdem $E[X[i+k] \cdot Y[i]]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ unabhängig von i für alle ganzen Zahlen i ist. Wenn $X[.]$ und $Y[.]$ gemeinsam schwach stationär sind, dann schreiben wir

$$R_{XY}[k] = E[X[i+k] Y[i]] \quad (\text{alle } i \in \mathbb{Z}) \quad (5.3.5)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die zeitdiskrete Funktion $R_{XY}[.]$ wird *Kreuzkorrelationsfunktion* [cross-correlation function] des gemeinsam schwach stationären stochastischen Prozesses genannt. Zu beachten und sorgfältig mit (5.2.4) zu vergleichen ist:

$$\begin{aligned} R_{XY}[-k] &= E[X[i-k] Y[i]] \\ &= E[Y[i] X[i-k]] \\ &= E[Y[j+k] X[j]] \\ &= R_{YX}[k]. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Warnung: Einige Autoren definieren " $R_{XY}[k]$ " als $E[X[i] \cdot Y[i+k]]$ an Stelle von (5.3.5). " $R_{XY}[k]$ " ist $R_{YX}[k]$ in unserer Notation, welche die Notation ist, die heute von den meisten Autoren bevorzugt wird. Der Leser sollte immer kontrollieren, welche Definition von $R_{XY}[.]$ gebraucht wird, wenn er sich in die Literatur über stochastische Prozesse vertieft.

Wir kehren nun zurück zu unserer Betrachtung der Situation in Fig. 5.1.1, wenn das Eingangssignal $X[.]$ des LDS ein schwach stationärer Prozess ist. Wir beginnen mit der Berechnung von

$$\begin{aligned} E[Y[i+k] X[i]] &= E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] X[i+k-m] X[i]\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] E[X[i+k-m] X[i]] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] R_X[k-m], \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

was tatsächlich unabhängig von i ist (wobei wir (5.3.2), die Linearität des Erwartungswertes und (5.2.2) benützt haben, um (5.3.7) zu erhalten). Wenn wir nun den Beweis, dass $Y[.]$ schwach stationär ist, vervollständigen, indem wir zeigen, dass $E[Y[i+k] \cdot Y[i]]$ unabhängig von i ist, dann wird aus (5.3.7) folgen, dass $X[.]$ und $Y[.]$ gemeinsam schwach stationär sind mit der Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{YX}[.] = h[.] * R_X[.]. \quad (5.3.8)$$

Mit diesem Ziel im Auge berechnen wir

$$\begin{aligned}
E[Y[i+k] Y[i]] &= E\left[Y[i+k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[i-m] h[m] \right] \\
&= E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] Y[i+k] X[i-m] \right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] E[Y[i+k] X[i-m]] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] R_{YX}[k+m] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[-n] R_{YX}[k-n] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[-n] R_{YX}[k-n], \tag{5.3.9}
\end{aligned}$$

was tatsächlich unabhängig von i ist (und wobei wir wiederum (5.3.2), die Linearität des Erwartungswertes, (5.3.7) [wo wir die Notation $R_{YX}[k]$ für die Grösse auf der linken Seite von (5.3.7) verwendet haben], den Variablenwechsel $n = -m$ und die Tatsache, dass eine Summe, die absolut konvergiert, nicht von der Reihenfolge der Glieder abhängt, ausgenützt haben). Somit ist $Y[.]$ tatsächlich schwach stationär mit der Autokorrelationsfunktion

$$R_Y[.] = h[.] * R_{YX}[.]. \tag{5.3.10}$$

Wir fassen die obigen Resultate zusammen.

Antwort eines LDS auf ein schwach stationäres Eingangssignal: Wenn der schwach stationäre stochastische Prozess $X[.]$ das Eingangssignal eines LDS mit Kronecker-Delta-Antwort $h[.]$ ist, dann ist das Ausgangssignal $Y[.]$ ebenfalls schwach stationär und $X[.]$ und $Y[.]$ sind zudem gemeinsam schwach stationär. Für diese gemeinsam schwach stationären Prozesse gelten die folgenden Beziehungen:

$$m_Y = m_X \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]; \tag{5.3.11}$$

$$R_{YX}[.] = h[.] * R_X[.]; \tag{5.3.12}$$

und $R_Y[.] = h[.] * R_{YX}[.]. \tag{5.3.13}$

5.4. Die Bedeutung der z-Transformation auf dem Einheitskreis

Wir unterbrechen unsere Behandlung der stochastischen Prozesse, damit wir die physikalische Bedeutung der z-Transformation eines zeitdiskreten Signals $f[.]$, ausgewertet auf dem Einheitskreis, das heisst die Bedeutung von $F(e^{j\Omega})$ für $-\pi < \Omega \leq \pi$, betrachten können. Wir beginnen damit, dass die Komponenten von $f[.]$ die Koeffizienten eines zeitkontinuierlichen Abtastsignals $f_c(t)$ sind:

$$f_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] \delta(t - kT). \quad (5.4.1)$$

Dabei stellt T die Zeit zwischen den Impulsen in dieser Impulsfolge und $\delta(\cdot)$ den Dirac-Stoss [unit impulse "function"] dar. (Eine genaue Abhandlung des Dirac-Stosses findet sich im Anhang). Die Laplace-Transformierte von $f_c(t)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} F_c(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(t) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \delta(t - kT) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] e^{-skT}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Wenn wir $F_c(s)$ auf der *Frequenzachse*, das heisst für $s = j\omega$ und $-\infty < \omega < +\infty$ aus-werten, ergibt sich die Fouriertransformierte oder das *Spektrum* des zeitkontinuierlichen Signals zu

$$F_c(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] (e^{j\omega T})^{-k}. \quad (5.4.3)$$

Für die z-Transformierte von $f[.]$ erhalten wir auf dem Einheitskreis

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] (e^{j\Omega})^{-k}. \quad (5.4.4)$$

Wenn wir (5.4.3) und (5.4.4) vergleichen, sehen wir, dass das "Spektrum" $F(e^{j\Omega})$ des zeitdiskreten Signals $f[.]$ exakt gleich dem Spektrum $F_c(j\omega)$ des entsprechenden zeitkontinuierlichen Abtastsignals ist für diejenigen (Kreis-)Frequenzen Ω , die

$$\omega = \frac{\Omega}{T}, \quad -\pi < \Omega \leq \pi \quad (5.4.5)$$

erfüllen. Diese Tatsache rechtfertigt den Gebrauch des Begriffes der *normierten Frequenz* für die Frequenzvariable Ω im Spektrum $F(e^{j\Omega})$. Überdies folgt aus (5.4.3) und der Periodizität von $e^{j\omega T}$ in ω mit Periode $\frac{2\pi}{T}$, dass $F_c(j\omega)$ ebenfalls periodisch in ω mit Periode $\frac{2\pi}{T}$ ist. Das bedeutet, dass das ganze Spektrum $F_c(j\omega)$ für $-\infty < \omega < +\infty$ gerade die periodische

Fortsetzung des Spektrums $F(e^{j\Omega})$ des zeitdiskreten Signals ist, das gemäss (5.4.5) auf dem Einheitskreis ausgewertet wird.

Die obige Diskussion rechtfertigt, $F(e^{j\Omega})$ für $-\pi < \Omega \leq \pi$ *das Spektrum oder den Frequenzinhalt* [frequency content] des zeitdiskreten Signals $f[.]$ zu nennen, wie es auch gerechtfertigt ist, $H(e^{j\Omega})$ für $-\pi < \Omega \leq \pi$ den *Frequenzgang* [frequency response] eines LDS mit Kronecker-Delta-Antwort $h[.]$ zu nennen. Wenn $h[.]$ eine *reellwertige* zeitdiskrete Funktion ist, dann gilt

$$H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega}). \quad (5.4.6)$$

Das Spektrum eines reellen zeitdiskreten Signals bei einer negativen normierten Frequenz ist also das konjugiert-komplexe seines Wertes bei der entsprechenden positiven normierten Frequenz. Der Leser kann (5.4.6) leicht für sich beweisen, oder einfach beachten, dass (5.4.6) aus der obigen Diskussion und der Tatsache folgt, dass $F_c(-j\omega) = F_c^*(j\omega)$ gilt, weil $f_c(t)$ ein reelles zeitkontinuierliches Signal ist.

Unsere Diskussion in diesem Abschnitt zeigt, dass das LDS mit dem Frequenzgang, der in Fig. 5.4.1 gezeigt ist, ein *ideales Bandpassfilter* ist, das denjenigen Teil des Eingangssignals, dessen Spektrum im normierten Frequenzband $\Omega_1 < |\Omega| < \Omega_2$ liegt, ungestört durchlässt und denjenigen Teil des Eingangssignals, dessen Spektrum ausserhalb dieses Bands liegt, vollständig unterdrückt. Wir werden gleich von dieser Tatsache Gebrauch machen.

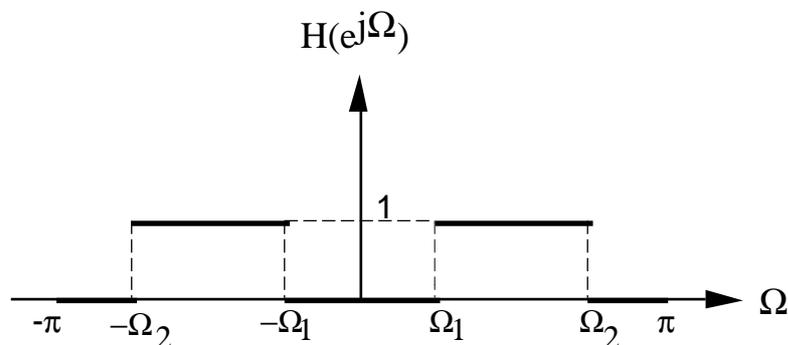


Fig. 5.4.1: Der Frequenzgang eines idealen Bandpassfilters.

5.5. Die Wiener-Khinchine Relation

Genauso wie wir mit $S_X(z)$ die z -Transformierte von $R_X[.]$ bezeichnen, werden wir mit $S_{YX}(z)$ die z -Transformierte von $R_{YX}[.]$ bezeichnen. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, eine physikalische Interpretation dieser z -Transformierten, insbesondere von $S_X(z)$, zu erhalten. Betrachten wir noch einmal die Situation von Fig. 5.1.1, wobei das Eingangssignal des LDS ein schwach stationärer stochastischer Prozess ist. Die Faltungseigenschaft der z -Transformation zusammen mit (5.3.12) gibt

$$S_{YX}(z) = H(z) \cdot S_X(z), \quad (5.5.1a)$$

$$\text{ROC}(R_{YX}[\cdot]) \supseteq \text{ROC}(h[\cdot]) \cap \text{ROC}(R_X[\cdot]). \quad (5.5.1b)$$

Ähnlich gibt (5.3.13) mit Hilfe der Zeitumkehr-Eigenschaft der z-Transformation

$$S_Y(z) = H(z^{-1}) S_{YX}(z), \quad (5.5.2a)$$

$$\text{ROC}(R_Y[\cdot]) \supseteq \text{ROC}(h[-\cdot]) \cap \text{ROC}(R_{YX}[\cdot]). \quad (5.5.2b)$$

Wenn wir (5.5.1) und (5.5.2) kombinieren, ergibt sich die interessante Beziehung

$$S_Y(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \cdot S_X(z), \quad (5.5.3a)$$

$$\text{ROC}(R_Y[\cdot]) \supseteq \text{ROC}(h[-\cdot]) \cap \text{ROC}(h[\cdot]) \cap \text{ROC}(R_X[\cdot]), \quad (5.5.3b)$$

die wir bald ausnutzen werden.

Aus den Übungen erinnern wir uns an die Formel der inversen z-Transformation und schreiben:

$$\begin{aligned} f[0] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})(e^{j\Omega})^{-1} d(e^{j\Omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass $\text{ROC}(f[\cdot])$ den Einheitskreis beinhaltet. Diese Eigenschaft (5.5.4) wird manchmal die *Flächeneigenschaft* der z-Transformation genannt und ist oft sehr nützlich. Mit (5.5.4) und (5.2.3) können wir die Durchschnittsleistung des schwach stationären Ausgangsprozesses $Y[\cdot]$ unseres LDS als

$$\begin{aligned} E[Y^2[i]] &= R_Y[0] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_Y(e^{j\Omega}) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

schreiben, wiederum vorausgesetzt, dass $\text{ROC}(R_Y[\cdot])$ den Einheitskreis beinhaltet.

Nehmen wir nun an, dass wir die Durchschnittsleistung eines schwach stationären Prozesses $X[\cdot]$ innerhalb des normierten Frequenzbandes $\Omega_1 < |\Omega| < \Omega_2$, wobei $0 \leq \Omega_1 < \Omega_2 \leq \pi$ ist, messen wollen. Der einzige vernünftige Weg ist, $X[\cdot]$ das ideale Bandpassfilter $H(z)$ von Fig. 5.4.1 durchlaufen zu lassen und dann die Durchschnittsleistung des Ausgangsprozesses $Y[\cdot]$ zu messen. Wenn wir (5.5.3) und (5.5.5) kombinieren, zeigt sich, dass die Durchschnittsleistung, die wir auf diese Weise messen, gerade gleich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_Y(e^{j\Omega}) d\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) H(e^{-j\Omega}) S_X(e^{j\Omega}) d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 S_X(e^{j\Omega}) d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} S_X(e^{j\Omega}) d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_2}^{-\Omega_1} S_X(e^{j\Omega}) d\Omega \quad (5.5.6)
\end{aligned}$$

ist. (5.5.6) sagt uns nun, dass die Durchschnittsleistung in $X[\cdot]$ innerhalb eines bestimmten Frequenzbandes gerade gleich dem Integral von $\frac{1}{2\pi} S_X(e^{j\Omega})$ über dieses Frequenzband ist. Somit haben wir folgendes Resultat gefunden:

Wiener-Khinchine Relation: Für einen schwach stationären Prozess mit der Autokorrelationsfunktion $R_X[\cdot]$ ist die Funktion $\frac{1}{2\pi} S_X(e^{j\Omega})$ die *spektrale Leistungsdichte* [power spectral density] in dem Sinne, dass das Integral dieser Funktion über irgendein normiertes (Kreis-) Frequenzband die Durchschnittsleistung des stochastischen Prozesses in diesem Frequenzband ergibt.

Wenn wir (5.2.6) beachten, stellen wir fest, dass weisses Rauschen mit Leistung σ^2 eine konstante spektrale Leistungsdichte $\frac{1}{2\pi} S_X(e^{j\Omega}) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$, für alle Ω mit $-\pi < \Omega \leq \pi$ hat, was natürlich der Grund ist, wieso ein solcher Zufallsprozess "weiss" genannt wird.

Die Funktion $\frac{1}{2\pi} S_{YX}(e^{j\Omega})$ wird analog *spektrale Kreuzleistungsdichte* [cross power spectral density] der gemeinsam schwach stationären Prozesse $Y[\cdot]$ und $X[\cdot]$ genannt, aber diese Terminologie hat keine überzeugende physikalische Berechtigung.

Kapitel 6

Abtastung

6.1. Einführung

In Abschnitt 1.1 erwähnten wir schon, dass es "heute in der Signalverarbeitung üblich ist, analoge Eingangssignale so schnell wie möglich in digitale Signale umzuwandeln und diese digitalen Signale in raffinierter Art zu verarbeiten, bevor man das digitale Ausgangssignal in das gewünschte analoge Endsignal umwandelt". Es ist nun Zeit zu überlegen, wie man ein zeitkontinuierliches Signal in ein gleichwertiges zeitdiskretes Signal umwandeln kann und umgekehrt. Die Hauptmethode für die Umwandlung eines zeitkontinuierlichen Signals in ein zeitdiskretes Signal ist die *Abtastung* [sampling], welche wir bald im Detail besprechen werden. Zuerst jedoch erinnern wir uns an einige elementare Eigenschaften der Fourierreihen, die wir in unserem Studium über Abtastung ausnützen werden.

Der Einfachheit halber brauchen wir die sogenannte "komplexe Form" der Fourierreihe. Wenn g eine reellwertige oder komplexwertige Funktion ist, die auf der ganzen reellen Achse ($g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) definiert und *periodisch* mit der Periode Δ (oder einem Teiler von Δ) ist, dann kann g unter sehr schwachen Bedingungen als

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kx/\Delta}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.1.1)$$

geschrieben werden. Obwohl wir von dieser Tatsache nicht Gebrauch machen werden, erinnern wir den Leser, dass die Koeffizienten c_k durch

$$c_k = \frac{1}{\Delta} \int_a^{a+\Delta} g(x) e^{-j2\pi kx/\Delta} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6.1.2)$$

bestimmt sind, wobei der Parameter a beliebig gewählt werden kann, weil der Integrand periodisch mit Periode Δ ist. Die Reihe auf der rechten Seite von (6.1.1) wird *komplexe Fourierreihe* für g genannt. Wenn g eine reellwertige Funktion ist, dann gilt

$$c_{-k} = c_k^*. \quad (6.1.3)$$

Obwohl die Fourierreihe für periodische Funktionen aufgestellt wurde, kann sie natürlich verwendet werden, um irgendeine Funktion in einem Intervall der Länge Δ auf der reellen Achse darzustellen. In diesem Falle gilt Gleichung (6.1.1) nur für x in diesem spezifizierten Intervall, und in (6.1.2) wird der Anfangs- und Endwert dieses Intervall gewählt.

6.2. Das Abtasttheorem

Wir betrachten die Fouriertransformierte $F(j\omega)$ mit

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (6.2.1)$$

einer reell- oder komplexwertigen Funktion f . Das Signal ist ein *Basisband-Signal* mit der Bandbreite W Hz oder weniger, falls

$$F(j\omega) = 0 \quad \text{für} \quad |\omega| \geq 2\pi W \quad (6.2.2)$$

ist. Wir wollen nun die Fouriertransformierte $F(j\omega)$ für ein solches Signal durch eine Fourierreihe im Frequenzintervall $-2\pi W < \omega < +2\pi W$ mit der Länge $D = 4\pi W$, wo diese Fouriertransformierte ungleich null ist, darstellen. Es folgt aus (6.1.1) und unserer Diskussion über komplexe Fourierreihen, dass wir diese komplexwertige Funktion als

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn\omega}{2W}}, \quad -2\pi W < \omega < +2\pi W \quad (6.2.3)$$

schreiben können. Von $F(j\omega)$ erhalten wir mit der inversen Fouriertransformation

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega/(2W)} \right) e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

wobei wir (6.2.3) und die Tatsache, dass $F(j\omega)$ für $|\omega| \geq 2\pi W$ verschwindet, gebraucht haben. Wenn wir die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen, erhalten wir

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} e^{j\omega[t+n/(2W)]} d\omega.$$

Insbesondere sehen wir, dass

$$f\left(\frac{k}{2W}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} e^{j\omega(k+n)/(2W)} d\omega.$$

Aber dieses letzte Integral verschwindet für alle ganzen Zahlen k , ausgenommen für $k = -n$, für welches das Integral gerade $4\pi W$ ist. Somit haben wir bewiesen, dass

$$f\left(\frac{k}{2W}\right) = 2W c_{-k}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad (6.2.5)$$

Aus (6.2.3) folgt nun, dass wir die Fouriertransformierte des Basisband-Signals $f(t)$ als

$$F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} f\left(\frac{k}{2W}\right) e^{-\frac{jk\omega}{2W}}, \quad |\omega| < 2\pi W. \quad (6.2.6)$$

schreiben können. Weil $F(j\omega)$ für $|\omega| \geq 2\pi W$ verschwindet, folgt aus (6.2.6), dass die Abtastwerte $f\left(\frac{k}{2W}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, die Fouriertransformierte $F(j\omega)$ von $f(t)$ vollständig bestimmen und folglich auch $f(t)$ für *alle* Zeiten $t \in \mathbb{R}$ bestimmen. Wir haben somit das folgende wichtige Resultat bewiesen.

Nyquist-Shannon Abtasttheorem: Ein beliebiges (reelles oder komplexes) Basisband-Signal $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, mit Bandbreite W (Hz) oder weniger ($|F(j\omega)| = 0$ für $|\omega| \geq 2\pi W$) ist vollständig durch die Abtastwerte $f\left(\frac{k}{2W}\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$ im Intervall $\frac{1}{2W}$ (Abtastrate von $f_s = 2W$) bestimmt.

Unsere nächste Aufgabe ist es zu sehen, wie $f(t)$ aus den Abtastwerten $f\left(\frac{k}{2W}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden kann. Wir erinnern uns zunächst an Abschnitt 5.4, wonach das zeitkontinuierliche abgetastete Signal

$$f_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) \delta(t - kT) \quad (6.2.7)$$

die Fouriertransformierte

$$F_c(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) e^{-jk\omega T}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (6.2.8)$$

hat, welche eine periodische Funktion mit Periode $\frac{2\pi}{T}$ ist. Wenn wir nun

$$T = \frac{1}{2W} \quad (6.2.9)$$

wählen, dann sehen wir durch Vergleich von (6.2.6) und (6.2.8), dass

$$F_c(j\omega) = 2W \cdot F(j\omega), \quad -2\pi W < \omega < +2\pi W. \quad (6.2.10)$$

Mit anderen Worten können wir aus den Abtastwerten $f\left(\frac{k}{2W}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, ein zeitkontinuierliches abgetastetes Signal $f_c(\cdot)$ bilden, dessen Spektrum im ganzen Frequenzband, in dem das Spektrum des Basisband-Signals ungleich null ist, exakt $2W$ mal dem Spektrum dieses Basisband-Signals ist. Wenn wir also $f_c(\cdot)$ durch ein mit $\frac{1}{2W}$ skaliertes Tiefpassfilter der Bandbreite W laufen lassen, ist somit das Ausgangssignal genau das Basisband-Signal $f(\cdot)$. Wir haben bewiesen:

Rekonstruktion eines Signals aus den Nyquist-Shannon Abtastwerten: Ein beliebiges (reelles oder komplexes) Basisband-Signal $f(\cdot)$ mit Bandbreite W (Hz) oder weniger [das heisst $F(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 2\pi W$], kann aus seinen Abtastwerten $f(\frac{k}{2W})$, $k \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden, indem man das abgetastete Signal

$$f_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) \delta\left(t - \frac{k}{2W}\right)$$

durch ein Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion

$$H_w(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & 0 \leq |\omega| < 2\pi W \\ 0, & |\omega| > 2\pi W \end{cases}$$

wie in Fig.6.2.1 schickt.

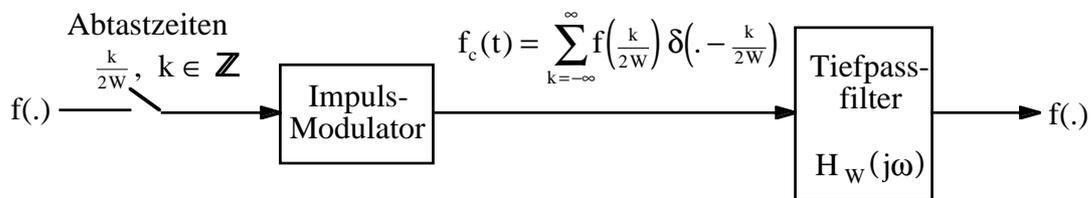


Fig. 6.2.1: Wenn $f(\cdot)$ ein (reelles oder komplexes) Basisband-Signal mit Bandbreite W oder weniger ist, ist das obige System einer direkten Verbindung äquivalent.

Das Tiefpassfilter $H_w(j\omega)$, das in Fig.6.2.1 gezeigt ist, hat die Impulsantwort

$$h_w(t) = \text{sinc}(2Wt), \quad (6.2.11)$$

wobei

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.2.12)$$

die folgende Funktion ist:

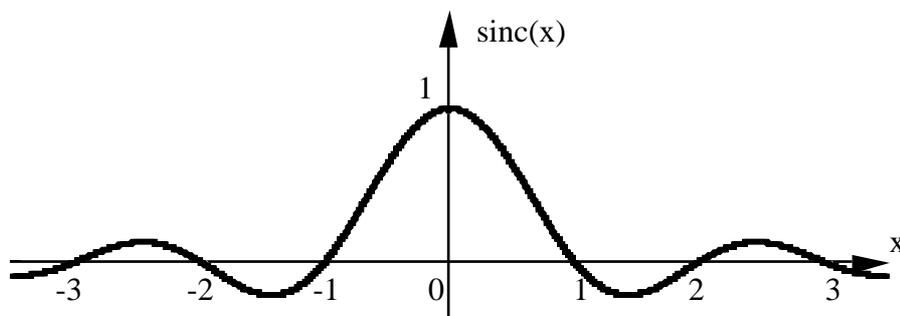


Fig. 6.2.2: Die Funktion sinc.

Man sieht, dass $h_w(0) = 1$ und $h_w(\frac{k}{2W}) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ gelten. Mit der Linearität und Zeitinvarianz dieses Tiefpassfilters $H_w(j\omega)$ ist das Ausgangssignal $f(t)$ als Antwort auf das Eingangssignal

$$f_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) \delta\left(t - \frac{k}{2W}\right),$$

(welches gemäss der Rekonstruktionsregel $f(t)$ ist, wenn $F(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 2\pi W$), gerade

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) h_w\left(t - \frac{k}{2W}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k). \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Gleichung (6.2.13), die oft nützlich ist, zeigt, dass die sinc-Funktion für die *Interpolation* der Abtastwerte des Basisband-Signals mit $F(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 2\pi W$ benützt werden muss, um die Werte von $f(t)$ zwischen den Abtastzeiten zu bestimmen. Gleichung (6.2.13) liefert uns überdies auch eine Interpretation für die Skalierung des Rekonstruktionsfilters $H_w(j\omega)$. Der Faktor $\frac{k}{2W}$ bewirkt im Zeitbereich eine sinc-Amplitude von $h_w(0) = 1$, das heisst, dass die Werte der zeitdiskreten Funktion $f[k]$ genau den Abtastwerten $f(\frac{k}{2W})$ der zeitkontinuierlichen Funktion $f(t)$ entsprechen, nämlich - unter Verwendung von (6.2.9) - $f[k] = f(kT)$.

6.3. Diskussion des Abtasttheorems

Das Abtasttheorem [sampling theorem] besagt im wesentlichen, dass das System, das in Fig. 6.2.1 gezeigt ist, einer direkten Verbindung entspricht, wenn das Eingangssignal $f(\cdot)$ ein Basisband-Signal mit Bandbreite W oder weniger ist. In diesem Abschnitt diskutieren wir einige mehr oder weniger offensichtliche Aspekte dieser bemerkenswerten Äquivalenz.

(i) **Der Abtastzeitpunkt.** Spielt es eine Rolle, ob wir $f(\cdot)$ zu Zeiten $\frac{k}{2W} - \tau$ (wobei $0 \leq \tau < \frac{1}{2W}$ ist) anstatt genau zu den Zeiten $\frac{k}{2W}$, wie im Abtasttheorem und in Fig. 6.3.1 angegeben, abtasten? Der gesunde Menschenverstand sagt nein, es spielt keine Rolle (vorausgesetzt natürlich, dass der Abtastwert $f(\frac{k}{2W} - \tau)$ den Impuls $\delta(t - \frac{k}{2W} + \tau)$ moduliert), und der gesunde Menschenverstand hat recht. Indem wir den Ursprung neu definieren, sehen wir, dass diese Situation dem Abtasten des verzögerten Signals $f(\cdot - \tau)$ zu Zeiten $\frac{k}{2W}$ entspricht. Aber wenn $f(\cdot)$ ein Basisband-Signal der Bandbreite W oder weniger ist, dann ist auch $f(\cdot - \tau)$ ein Basisband-Signal der Bandbreite W oder weniger und folglich garantiert das Abtasttheorem, dass $f(\cdot - \tau)$ aus seinen Abtastwerten, in der uns nun vertrauten Art, rekonstruiert werden kann.

(ii) **Nichtideale Impulse.** Wenn man ein bandbegrenzttes Signal aus seinen Abtastwerten rekonstruiert, kann man in der Praxis nicht Gebrauch von wahren (Dirac-)Impulsen am Eingang des Tiefpassfilters machen. Man begnügt sich in der Regel mit einer Approximation eines Impulses wie dem rechteckigen Puls $\delta_\Delta(\cdot)$, der in Fig. 6.3.1 gezeigt ist.

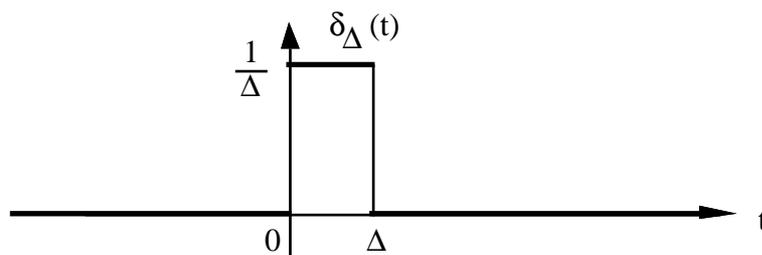


Fig. 6.3.1: Ein nichtidealer Impuls, wie er oft gebraucht wird, um ein Tiefpass-Signal aus seinen Abtastwerten zu rekonstruieren.

Wie verzerrt nun der Gebrauch eines solchen nichtidealen Impulses die Rekonstruktion von $f(\cdot)$? Um dies zu sehen, beachten wir, dass das nichtideale Signal $f(\frac{k}{2W}) \delta_{\Delta}(\cdot - \frac{k}{2W})$ erzeugt werden kann, indem man das ideale Signal $f(\frac{k}{2W}) \delta(\cdot - \frac{k}{2W})$ durch ein zeitkontinuierliches lineares System mit der Impulsantwort $\delta_{\Delta}(\cdot)$ schickt. Um das Signal zu rekonstruieren, wird das Signal durch ein Tiefpassfilter $H_W(j\omega)$ geschickt. Aber die Reihenfolge von zwei zeitinvarianten linearen Systemen kann vertauscht werden, ohne dass sich das Ausgangssignal ändert. *Somit kommt die Wirkung auf die Rekonstruktion eines Tiefpass-Signals $f(\cdot)$, verursacht durch den Gebrauch eines nichtidealen Impulses $\delta_{\Delta}(\cdot)$ (oder irgendeiner anderen Funktion) an Stelle eines wahren Impulses am Eingang des Tiefpassfilters $H_W(j\omega)$ damit gleich, dass man das unverzerrte rekonstruierte Signal $f(\cdot)$ durch ein lineares System mit Impulsantwort $\delta_{\Delta}(\cdot)$ schickt.* [Das gilt immer noch, wenn man das ideale Tiefpassfilter durch ein praktisches Tiefpassfilter ersetzt.]

Eine übliche Lösung für die Rekonstruktion ist, den Impuls-Modulator in Fig. 6.2.1. durch ein "Abtast-und-Halteglied" [sample-and-hold circuit], dessen Ausgang $f(\frac{k}{2W})$ im Zeitintervall $\frac{k}{2W} \leq t < \frac{k+1}{2W}$ ist, zu ersetzen. Tatsächlich ist das genau das gleiche, wie wenn man den nichtidealen Impuls $\Delta \delta_{\Delta}(\cdot)$ mit $\Delta = \frac{1}{2W}$ für die Rekonstruktion gebraucht, wie es oben beschrieben ist.

(iii) Abtastfrequenz. Wir haben gesehen, dass eine Abtastrate von $f_s = 2W$ genügt, um irgendein Basisband-Signal der Bandbreite W oder weniger nach Figur 6.2.1 zu rekonstruieren. Für ein gegebenes Basisband-Signal $f(\cdot)$ mit einer Bandbreite *exakt* W (das heißt, dass für irgendein $\hat{W} < W$ die Bedingung $F(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq \hat{W}$ verletzt ist) ist $2W$ die minimal notwendige Abtastfrequenz; sie wird *Nyquist-Frequenz* für dieses Signal genannt.

Es gibt *keine Redundanz* in der Darstellung sämtlicher Basisband-Signale der Bandbreite W (Hz) oder weniger, wenn sie mit der Frequenz $2W$ abgetastet werden, im Sinne, dass es eine 1:1 Korrespondenz zwischen den Signalen in dieser Menge und den beidseitigen Sequenzen von möglichen Abtastwerten im Intervall $\frac{1}{2W}$ gibt. Denn wenn wir reelle (oder komplexe) Zahlen $f(\frac{k}{2W})$, $k \in \mathbb{Z}$ beliebig wählen, dann das Signal

$$f_c(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right) \delta\left(\cdot - \frac{k}{2W}\right)$$

bilden und dieses durch ein Tiefpassfilter $H_w(j\omega)$ schicken, erhalten wir garantiert ein Tiefpass-Signal $f(\cdot)$ mit diesen beliebig gewählten Abtastwerten und einer Bandbreite von W Hz oder weniger.

(iv) **Nichtideale Tiefpassfilterung.** Ein Tiefpassfilter mit der Impulsantwort $h_w(t) = \text{sinc}(2Wt)$ ist ein nichtkausales System, wie Fig. 6.2.2 zu entnehmen ist. In Echtzeit-Anwendungen kann man natürlich keine nichtkausalen Systeme brauchen. Man begnügt sich in der Regel mit einer vernünftigen Approximation des Tiefpassfilters $H_w(j\omega)$. Wir wissen, dass das Eingangssignal des Tiefpassfilters in Fig. 6.2.1 genau das gewünschte Spektrum $F(j\omega)$ im Frequenzband $-2\pi W < \omega < +2\pi W$ hat. Wenn wir ein Filter bauen, dessen Frequenzgang praktisch $\frac{1}{2W}$ im wichtigen Teil dieses Bandes und praktisch 0 ausserhalb dieses Bandes ist, dann werden wir also eine gute Rekonstruktion des Basisband-Signals $f(\cdot)$ erhalten.

In der Praxis tastet man häufig weit über der Nyquist-Frequenz ab, um die Anforderungen an das Tiefpass-Rekonstruktionsfilter zu mildern.

(v) **Aliasing.** Wir kommen nun zu der interessantesten Frage von allen: Was passiert, wenn das Signal $f(\cdot)$ kein Basisband-Signal mit Bandbreite W oder weniger ist, wir aber trotzdem mit einer Frequenz von $2W$ abtasten?

Der Schlüssel zum Verständnis, was passiert, wenn man ein Nicht-Basisbandsignal (d.h. ein Signal, das nicht überall verschwindet für $|\omega| \geq 2\pi W$) alle $\frac{1}{2W}$ Sekunden abtastet, liegt in der folgenden einfachen Eigenschaft:

Eigenschaft der Abtastinvarianz: Für ein beliebiges komplexes zeitkontinuierliches Signal $f(\cdot)$ mit dem Spektrum $F(j\omega)$ sind die Abtastwerte $f\left(\frac{k}{2W}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, abgetastet alle $\frac{1}{2W}$ Sekunden, genau die gleichen wie diejenigen des komplexen zeitkontinuierlichen Signals $g(\cdot)$ mit dem Spektrum

$$G(j\omega) = F(j(\omega - 4\pi nW)), \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z},$$

d.h. das Spektrum von $g(\cdot)$ ist das Spektrum von $f(\cdot)$, verschoben um $2Wn$ Hz.

Beweis: Um diese Eigenschaft zu beweisen, notieren wir das Signal $g(\cdot)$ vorerst so, dass $g(t) = e^{j4\pi nWt} f(t)$ das Spektrum

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - 4\pi nW)t} dt \\ &= F(j(\omega - 4\pi nW)) \end{aligned}$$

hat, und daher ist $g(\cdot)$ tatsächlich das Signal, das in der Eigenschaft der Abtastinvarianz angegeben wurde. Es folgt dann unmittelbar, dass

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{k}{2W}\right) &= e^{j4\pi nW\left(\frac{k}{2W}\right)} f\left(\frac{k}{2W}\right) \\
 &= e^{j2\pi kn} f\left(\frac{k}{2W}\right) \\
 &= f\left(\frac{k}{2W}\right),
 \end{aligned}$$

was die Eigenschaft beweist. o

Beispiel: Das Signal $f(\cdot)$ habe das reelle Spektrum gegeben in Fig. 6.3.2a. Wir können nun schreiben:

$$F(j\omega) = F_{-1}(j\omega) + F_0(j\omega) + F_1(j\omega), \quad (6.3.1)$$

wobei die drei Spektren auf der rechten Seite von (6.3.1) in Fig. 6.3.2b gezeigt werden. Mit der Eigenschaft der Abtastinvarianz haben die entsprechenden Signale $f_{-1}(\cdot)$, $f_0(\cdot)$ und $f_1(\cdot)$ die gleichen Abtastwerte zu den Zeitpunkten $\frac{k}{2W}$, $k \in \mathbb{Z}$, wie die drei Basisbandsignale $\mathbf{f}_{-1}(\cdot)$, $\mathbf{f}_0(\cdot) = f_0(\cdot)$ und $\mathbf{f}_1(\cdot)$, deren Spektren in Fig. 6.3.2c abgebildet sind. Daher sind die Abtastwerte von

$$f(\cdot) = f_{-1}(\cdot) + f_0(\cdot) + f_1(\cdot)$$

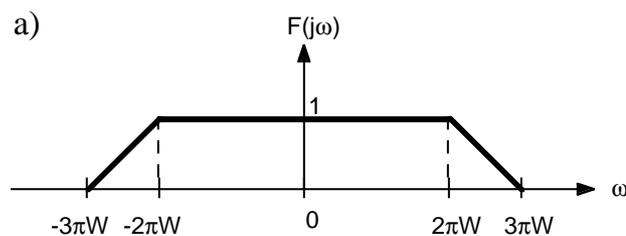
genau die gleichen wie diejenigen des Signals

$$\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_{-1}(\cdot) + \mathbf{f}_0(\cdot) + \mathbf{f}_1(\cdot),$$

dessen Spektrum

$$\mathbf{F}(j\omega) = \mathbf{F}_{-1}(j\omega) + \mathbf{F}_0(j\omega) + \mathbf{F}_1(j\omega)$$

in Fig. 6.3.2d gezeigt wird. $\mathbf{f}(\cdot)$ ist aber ein Basisbandsignal! Daraus folgt, dass, falls wir das Nicht-Basisbandsignal $f(\cdot)$ als Eingangssignal des Systems in Fig. 6.2.1 ansehen würden, der Ausgang des Systems $\mathbf{f}(\cdot)$ statt $f(\cdot)$ wäre, weil $\mathbf{f}(\cdot)$ ein Basisbandsignal mit exakt den gleichen Abtastwerten wie $f(\cdot)$ ist. Man sagt, dass das Basisbandsignal $\mathbf{f}(\cdot)$ der "Alias" (d.h. die scheinbare Identität) im Basisband des Nicht-Basisbandsignals $f(\cdot)$ ist. Aufgrund des obigen leichten Beispiels sollte der Leser nun das allgemeine Phänomen des Aliasing verstanden haben, welches wir nun formulieren.



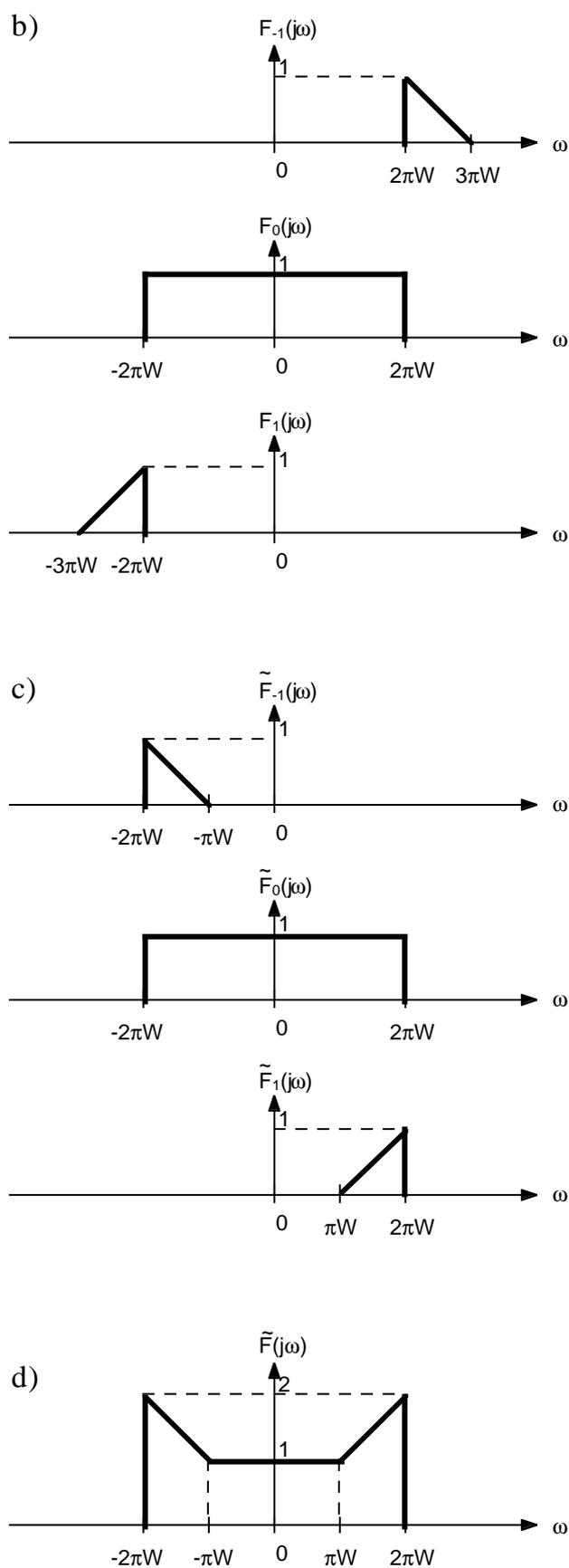


Fig. 6.3.2: Abtastung eines Nicht-Basisbandsignals.

Aliasing: Die Abtastwerte zu den Zeitpunkten $\frac{k}{2W}$, $k \in \mathbb{Z}$, irgendeines komplexen zeitkontinuierlichen Signals $f(\cdot)$ [dessen Spektrum $F(j\omega)$ keine Impulse an irgendeiner der Frequenzen $\omega = 4\pi nW$, $n \in \mathbb{Z}$, aufweist] sind genau gleich wie die Abtastwerte zu den Zeitpunkten $\frac{k}{2W}$, $k \in \mathbb{Z}$, des Basisbandsignals $\mathbf{f}(\cdot)$, dessen Spektrum

$$\mathbf{F}(j\omega) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - 4\pi nW)), & |\omega| < 2\pi W \\ 0, & |\omega| \geq 2\pi W \end{cases} \quad (6.3.2)$$

ist.

[*Bemerkung:* Die Bedingung der Abwesenheit von Impulsen an den Frequenzen $\omega = 4\pi nW$, $n \in \mathbb{Z}$, erlaubt das Ignorieren des Wertes der Summe auf der rechten Seite in (6.3.2) an der diskreten Frequenz $\omega \equiv 2\pi W$ für die Berechnung der entsprechenden zeitkontinuierlichen Funktion $\mathbf{f}(\cdot)$.]

Beweis: Der einfache Beweis geht wie folgt. Sei $f_n(\cdot)$ das Signal, dessen Spektrum

$$F_n(j\omega) = \begin{cases} F(j\omega), & -2\pi W - 4\pi nW < \omega < +2\pi W - 4\pi nW \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, so dass $F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(j\omega)$ ist und daher auch $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t)$. Mit der Eigenschaft der Abtastinvarianz hat $f_n(\cdot)$ die gleichen Abtastwerte zu den Zeitpunkten $\frac{k}{2W}$, $k \in \mathbb{Z}$, wie das Basisbandsignal $\mathbf{f}_n(\cdot)$, dessen Spektrum $\mathbf{F}_n(j\omega) = F_n(j(\omega - 4\pi nW))$ bzw.

$$\mathbf{F}_n(j\omega) = \begin{cases} F(j(\omega - 4\pi nW)), & -2\pi W < \omega < +2\pi W \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3.3)$$

ist. Daraus folgt, dass das Basisbandsignal

$$\mathbf{f}_n(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_n(\cdot) \quad (6.3.4)$$

die gleichen Abtastwerte zu den Zeitpunkten $\frac{k}{2W}$, $k \in \mathbb{Z}$ hat, wie $f(\cdot)$. Ausserdem zeigen (6.3.3) und (6.3.4), dass das Spektrum $\mathbf{F}(j\omega)$ des Basisbandsignals $\mathbf{f}(\cdot)$ tatsächlich durch (6.3.2) gegeben ist, was zu beweisen war. \circ

Erneut sehen wir, dass, falls $f(\cdot)$ ein Nicht-Basisbandsignal am Eingang des Systems in Fig. 6.2.1 sein würde, der Ausgang das Basisbandsignal $\mathbf{f}(\cdot)$ statt $f(\cdot)$ wäre, weil $\mathbf{f}(\cdot)$ ein Basisbandsignal mit den gleichen Abtastwerten ist. Das Basisbandsignal $\mathbf{f}(\cdot)$ ist der "Alias" im Basisband des Nicht-Basisbandsignals $f(\cdot)$.

In den meisten praktischen Anwendungen von abgetasteten Signalen bietet es sich an, mit einem Tiefpass vor dem Abtasten zu filtern, um Verzerrungen, verursacht durch Aliasing, zu minimieren.

(vi) **Allgemeine Basisband-Signale.** Der vorsichtige Leser wird bemerken, dass das Abtasttheorem nur für die Klasse von Basisband-Signalen, deren Spektrum durch eine Fourierreihe dargestellt werden kann, gilt. Diese Einschränkung ist so schwach, dass sie in der Theorie wie in der Praxis überhaupt nicht zu spüren ist, und wir werden von nun an immer annehmen,

dass unsere Basisband-Signale von einem solchen Typus sind, so dass das Abtasttheorem gilt.

Kapitel 7

Lineare minimale mittlere quadratische Fehlerschätzung und Filterung

7.1. Einführung

Viele der interessantesten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Elektrotechnik gehen aus Entscheidungs- und Schätzproblemen hervor. In einem Entscheidungsproblem versucht man, den Wert irgendeiner Zufallsgrösse, der uns interessiert, mit Hilfe einer Beobachtung abzuleiten. Zum Beispiel könnte man versuchen abzuleiten, welche der acht möglichen Phasen in einem Phase-shift-keying Modulations-System mit Hilfe des empfangenen Signals über ein Symbol-Intervall gesendet wurde. Eine *Entscheidung* ist entweder richtig oder falsch, so dass die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung ein offensichtliches und oft gebrauchtes Kriterium der Güte in Entscheidungsproblemen ist. In einem Schätzproblem versucht man andererseits, eine gute "Approximation" für irgendeine Zufallsgrösse mit Hilfe irgendeiner Beobachtung zu machen. Zum Beispiel könnte man versuchen, den Abstand zu einem gewissen Objekt so genau wie möglich aufgrund eines empfangenen Radarsignals zu bestimmen. Im allgemeinen ist eine Schätzung nie ganz richtig, sondern näher oder weiter entfernt vom wahren Wert der zu bestimmenden Variable. Die Güte in Schätzproblemen wird meistens so gewählt, dass grosse "Fehler" stärker gewichtet werden als kleine Fehler. Der Wert einer Schätzung, im Gegensatz zu einer Entscheidung, muss kein möglicher Wert einer zu bestimmenden Zufallsgrösse sein. Zum Beispiel ist es für eine gegebene Beobachtung durchaus möglich, dass 2.3 eine gute Schätzung einer ganzzahligen Zufallsgrösse ist, aber 2.3 ist nie eine gute Entscheidung für den Wert einer ganzzahligen Zufallsgrösse.

Eines der meist gebrauchten Kriterien der Güte in Schätzproblemen ist der gemittelte quadratische Fehler. Wenn X eine zu schätzende Zufallsgrösse und \hat{X} ihre Schätzung ist, dann ist der *mittlere quadratische Fehler* die Grösse $E[(X - \hat{X})^2]$. Der mittlere quadratische Fehler ist gerade die "durchschnittliche Energie" des *Fehlers* $X - \hat{X}$, eine Interpretation, die erklärt, warum diese Grösse in der Praxis so oft von Interesse ist.

Manchmal möchte man die Schätzregel, die gebraucht wird, einschränken. In diesem Kapitel werden wir nur *lineare* Schätzregeln betrachten. Wenn X die zu schätzende Zufallsgrösse und die Beobachtung der Zufallsvektor $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist, dann bildet eine *lineare Schätzregel* die Schätzung \hat{X} wie folgt:

$$\hat{X} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m. \quad (7.1.1)$$

Dabei sind c_1, c_2, \dots, c_m reelle Zahlen, die die spezielle Schätzregel spezifizieren. Die Bedeutung von (7.1.1) ist natürlich, dass die Beobachtung von $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ die Schätzung $x = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$ erzeugt. Das grundlegende Problem der linearen mittleren quadratischen Fehlerschätzung ist leicht zu formulieren: Finde c_1, c_2, \dots, c_m so, dass die Schätzung X von (7.1.1) den mittleren quadratischen Fehler $E[(X - X)^2]$ minimiert.

7.2. Vorbereitende Überlegungen

Bevor wir das Problem der linearen mittleren quadratischen Fehlerschätzung anpacken, führen wir in diesem Abschnitt gewisse Notationen und Konzepte ein, die später sehr nützlich sein werden.

Wir nehmen in diesem Kapitel durchwegs an, dass alle Zufallsgrößen, die wir betrachten, endliche erste und zweite Momente haben, eine so schwache Forderung, dass sie kaum eine Einschränkung in der Praxis ist. Wir nehmen weiter an, dass eine Zufallsgröße mit einem zweiten Moment, das null ist, die Null-Zufallsgröße $\mathbf{0}$ ist. Wir nehmen also an, dass $E[X^2] = 0$ impliziert, dass $X = \mathbf{0}$ ist. Tatsächlich kann man von $E[X^2] = 0$ nur ableiten, dass die Menge der Abtastpunkte ω mit $X(\omega) \neq 0$ ein Ereignis ist, das Wahrscheinlichkeit 0 hat. Um ganz genau zu sein, müssten wir sagen, dass $E[X^2] = 0$ impliziert, dass $X = \mathbf{0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 ist, welches unter Kennern als " $X = \mathbf{0}$ wpl" (with probability 1) geschrieben wird. Aus $X = Y$ wpl und $Y = Z$ wpl folgt $X = Z$ wpl. Somit ist die Menge aller Zufallsgrößen, die paarweise miteinander gleich mit WSK 1 sind, eine Äquivalenzklasse. Für alle praktischen Zwecke sind alle Zufallsgrößen in dieser Äquivalenzklasse identisch. Anstatt die Notation mit vielen "wpls" zu überhäufen, die praktisch keine Bedeutung haben, vereinbaren wir einfach $\mathbf{0}$, als Vertreter aller Zufallsgrößen X mit $E[X^2] = 0$ zu nehmen. In einem gewissen Sinne werden wir immer mit solchen Vertretern von Äquivalenzklassen arbeiten, wenn wir mit einzelnen Zufallsgrößen in diesem Kapitel arbeiten, aber wir werden es nicht mehr erwähnen.

Für irgendwelche Zufallsgrößen Y_1, Y_2, \dots, Y_m werden wir $\mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ schreiben, um die Menge aller Zufallsgrößen, die durch Linearkombination dieser gegebenen Zufallsgrößen gebildet werden können, zu bezeichnen, das heisst die Menge aller Zufallsgrößen der Form $c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$, wobei c_1, c_2, \dots, c_m reelle Zahlen sind. Wir werden $\mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ den *Raum der Zufallsgrößen* nennen, der durch Y_1, Y_2, \dots, Y_m aufgespannt wird. Die Zufallsgrößen Y_1, Y_2, \dots, Y_m sind *linear unabhängig*, wenn

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0 \quad (7.2.1)$$

gilt, sonst sind sie *linear abhängig*.

Die Zufallsgrößen X und Y werden *orthogonal* genannt, wenn $E[X \cdot Y] = 0$ ist. Wenn U irgendein *Raum* von Zufallsgrößen ist, dann ist der *orthogonale Raum* U^\perp die Menge aller Zufallsgrößen, die orthogonal zu jeder Zufallsgröße in U sind. [Wir überlassen dem Leser den einfachen Beweis, dass U^\perp tatsächlich ein Raum ist, das heisst, dass aus $X_1 \in U^\perp$ und $X_2 \in U^\perp$ folgt: $c_1 X_1 + c_2 X_2 \in U^\perp$.]

Lemma 1: $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Beweis: Die Zufallsgrösse $\mathbf{0}$ ist in jedem Raum, folglich ist sie in \mathbf{U} und in \mathbf{U}^\perp . Wir nehmen nun an, dass \mathbf{X} in \mathbf{U} und in \mathbf{U}^\perp ist. Dann ist $E[\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}] = E[\mathbf{X}^2] = 0$ und damit ist $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. \circ

Das folgende Lemma zeigt, dass es einfach ist, bei einer gegebenen Zufallsgrösse zu untersuchen, ob sie im orthogonalen Raum von $\mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist.

Lemma 2: Für $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, $Z \in \mathbf{U}^\perp \Leftrightarrow E[Z \cdot Y_1] = E[Z \cdot Y_2] = \dots = E[Z \cdot Y_m] = 0$.

Beweis: Wenn Z in \mathbf{U}^\perp ist, dann ist Z sicher orthogonal zu jeder der Zufallsgrössen Y_1, Y_2, \dots, Y_m . Umgekehrt, angenommen dass $E[Z \cdot Y_1] = E[Z \cdot Y_2] = \dots = E[Z \cdot Y_m] = 0$ ist, dann ist $E[Z(c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m)] = c_1 E[Z \cdot Y_1] + c_2 E[Z \cdot Y_2] + \dots + c_m E[Z \cdot Y_m] = 0$, so, dass Z tatsächlich orthogonal zu jeder Zufallsgrösse in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist. \circ

Das folgende Theorem ist der Schlüssel zur Lösung des Problems der linearen minimalen mittleren quadratischen Fehlerschätzung.

Zerlegungstheorem für Zufallsgrössen: Für $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ kann jede Zufallsgrösse \mathbf{X} eindeutig als $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ geschrieben werden, wobei $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{U}$ und $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{U}^\perp$ ist. [Die Zufallsgrössen \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 werden *Projektion von \mathbf{X} auf den Raum \mathbf{U}* und *Projektion von \mathbf{X} auf den Raum \mathbf{U}^\perp* genannt.]

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Angenommen, \mathbf{X} kann als $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ geschrieben werden, wobei $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{U}$ und $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{U}^\perp$ ist, und auch als $\mathbf{X} = \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4$, wobei $\mathbf{X}_3 \in \mathbf{U}$ und $\mathbf{X}_4 \in \mathbf{U}^\perp$ ist. Dann ist $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_2$. Aber $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3$ ist in \mathbf{U} , und $\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_2$ ist in \mathbf{U}^\perp , so dass Lemma 1 nun impliziert, dass $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ ist und folglich, dass $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_4$ ist.

Um den Beweis zu vervollständigen, müssen wir zeigen, dass wir immer \mathbf{X} als $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ schreiben können, wobei $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{U}$ und $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{U}^\perp$ ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass Y_1, Y_2, \dots, Y_m linear unabhängig sind. Das bedeutet im speziellen, dass keine dieser Zufallsgrössen die Zufallsgrösse $\mathbf{0}$ ist. Folglich können wir die Zufallsgrössen Z_1, Z_2, \dots, Z_m so definieren, dass $Z_1 = Y_1$ und

$$Z_i = Y_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{E[Y_i \cdot Z_j]}{E[Z_j^2]} \cdot Z_j \quad (7.2.2)$$

ist, für $i = 2, 3, \dots, m$. Man kann leicht nachprüfen, dass Z_2 orthogonal zu Z_1 ist, Z_3 orthogonal zu Z_1 und Z_2 ist, usw. Das bedeutet, dass die Zufallsgrössen Z_1, Z_2, \dots, Z_m paarweise orthogonal sind. Es ist klar, dass $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \supseteq \mathcal{S}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ ist. Aber es folgt aus (7.2.2), dass jedes Y_i als Linearkombination von Z_1, Z_2, \dots, Z_m geschrieben werden kann, so dass tatsächlich $\mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \mathcal{S}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ ist. Es bleibt nun zu zeigen, dass irgendeine Zufallsgrösse \mathbf{X} als Summe einer Zufallsgrösse \mathbf{X}_1 in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ und einer Zufallsgrösse \mathbf{X}_2 in \mathbf{U}^\perp geschrieben werden kann. Mit

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X} - \sum_{j=1}^m \frac{E[\mathbf{X} \cdot Z_j]}{E[Z_j^2]} \cdot Z_j \quad (7.2.3)$$

ist die Bedingung $E[X_2 \cdot Z_i] = 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$ erfüllt, wie leicht durch das Ausnutzen der paarweisen Orthogonalität von Z_1, Z_2, \dots, Z_m nachzuprüfen ist. Folglich ist nach Lemma 2 X_2 in U^\perp . Überdies ist

$$X_1 = \sum_{j=1}^m \frac{E[X \cdot Z_j]}{E[Z_j^2]} \cdot Z_j$$

eine Linearkombination von Z_1, Z_2, \dots, Z_m und folglich in $U = \mathcal{S}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$. Somit gibt (7.2.3) $X = X_1 + X_2$, wie es gewünscht wurde. \circ

7.3. Das Orthogonalitätsprinzip

Das allgemeine Problem der linearen minimalen mittleren quadratischen Fehlerschätzung (linear minimum-mean-squared-error estimation, LMMSE estimation) einer Zufallsgrösse X mit Hilfe der Beobachtung $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ kann folgendermassen ausgedrückt werden: Finde die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_m so, dass die Zufallsgrösse $X = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$ die Grösse $E[(X - \hat{X})^2]$ minimiert. Völlig gleichwertig kann das Problem wie folgt formuliert werden: Finde die Zufallsgrösse X in $U = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, welche $E[(X - \hat{X})^2]$ minimiert, und finde die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_m so, dass $X = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$ ist. Das folgende Resultat zeigt, dass die lineare minimale mittlere quadratische Fehlerschätzung eindeutig und nichts anderes ist als die Projektion von X auf den Raum $\mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, der durch die Komponenten der Beobachtung aufgespannt wird.

Charakterisierung der linearen minimalen mittleren quadratischen Fehler-Schätzung: Wenn $X = X_1 + X_2$ ist, wobei $X_1 \in U = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ und $X_2 \in U^\perp$ ist, dann ist $X = X_1$ die eindeutige Zufallsgrösse in $U = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, die $E[(X - \hat{X})^2]$ minimiert.

Beweis: Wir nehmen an, dass \hat{X} eine Zufallsgrösse in $U = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist, und betrachten \hat{X} als Schätzung von X . Der mittlere quadratische Fehler beträgt

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})^2] &= E[(X - X + X - \hat{X})^2] = E\left[\left((X - X) + (X - \hat{X})\right)^2\right] \\ &= E[(X - X)^2] + 2 \cdot E[(X - X)(X - \hat{X})] + E[(X - \hat{X})^2]. \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Aber $X - X = X - X_1 = X_2$ ist in U^\perp und folglich orthogonal zu $X - \hat{X}$ welches in U ist. Somit verschwindet der mittlere Term auf der rechten Seite von (7.3.1). Das ergibt

$$E[(X - \hat{X})^2] = E[(X - X)^2] + E[(X - \hat{X})^2], \quad (7.3.2)$$

und damit ist $E[(X - \hat{X})^2] \geq E[(X - X)^2]$ mit Gleichheit genau dann, wenn $E[(X - \hat{X})^2] = 0$ ist, genau dann also wenn $X - \hat{X} = \mathbf{0}$. \circ

Wir können nun die Methode formulieren, mit der alle Probleme der linearen minimalen mittleren quadratischen Fehlerschätzung gelöst werden können.

Das Orthogonalitätsprinzip. Eine Zufallsgrösse X in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist genau dann diejenige Zufallsgrösse in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, die $E[(X - \hat{X})^2]$ minimiert, wenn

$$E[Y_i(X - \hat{X})] = 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.3.3)$$

das heisst, dass der resultierende Fehler orthogonal zu jeder Komponente der Beobachtung ist. Die Konstanten c_1, c_2, \dots, c_m in $\hat{X} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$ sind genau dann eindeutig, wenn die Zufallsgrössen Y_1, Y_2, \dots, Y_m linear unabhängig sind.

Beweis: Lemma 2 zeigt, dass (7.3.3) mit der Aussage, dass $X_2 = X - \hat{X}$ in \mathbf{U}^\perp ist, gleichwertig ist. Somit gilt (7.3.3) genau dann, wenn \hat{X} die Projektion von X auf $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist. Obwohl die optimale Fehlerschätzung \hat{X} immer eine eindeutige Zufallsgrösse in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist, sind die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_m in $\hat{X} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$ genau dann eindeutig, wenn die Zufallsgrössen Y_1, Y_2, \dots, Y_m , die den Raum $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ aufspannen, linear unabhängig sind. \circ

Die Gleichungen (7.3.3) werden *Orthogonalitäts-Gleichungen* für die lineare minimale mittlere quadratische Fehlerschätzung genannt. Wenn wir $\hat{X} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_m Y_m$ in (7.3.3) einsetzen, ergeben sich die äquivalenten Gleichungen

$$c_1 E[Y_i Y_1] + c_2 E[Y_i Y_2] + \dots + c_m E[Y_i Y_m] = E[Y_i X] \text{ für } i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.3.4)$$

Somit können die Orthogonalitäts-Gleichungen in Matrix-Form als

$$\begin{bmatrix} E[Y_1^2] & E[Y_1 Y_2] & \dots & E[Y_1 Y_m] \\ E[Y_2 Y_1] & E[Y_2^2] & \dots & E[Y_2 Y_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Y_m Y_1] & E[Y_m Y_2] & \dots & E[Y_m^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[Y_1 X] \\ E[Y_2 X] \\ \vdots \\ E[Y_m X] \end{bmatrix}, \quad (7.3.5)$$

geschrieben werden, welche wir die *Matrix-Orthogonalitäts-Gleichung* nennen werden. Weil wir wissen, dass die Lösung für die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_m der linearen minimalen mittleren Fehlerschätzungsregel genau dann eindeutig ist, wenn die Zufallsgrössen Y_1, Y_2, \dots, Y_m linear unabhängig sind, wissen wir jetzt, dass umgekehrt diese Zufallsgrössen genau dann linear unabhängig sind, wenn die Matrix

$$\begin{bmatrix} E[Y_1^2] & E[Y_1 Y_2] & \dots & E[Y_1 Y_m] \\ E[Y_2 Y_1] & E[Y_2^2] & \dots & E[Y_2 Y_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Y_m Y_1] & E[Y_m Y_2] & \dots & E[Y_m^2] \end{bmatrix},$$

die in der Matrix-Orthogonalitäts-Gleichung erscheint, nicht singular ist.

Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir zwei nützliche Formeln für den mittleren quadratischen Fehler des optimalen linearen Schätzwertes angeben.

Der mittlere quadratische Fehler des linearen minimalen mittleren quadratischen Fehler-Schätzwertes: Wenn \hat{X} der lineare minimale mittlere Fehler-Schätzwert von X in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist, dann ist

$$E[(X - \hat{X})^2] = E[X \cdot (X - \hat{X})] \quad (7.3.6)$$

und

$$E[(X - \hat{X})^2] = E[X^2] - E[\hat{X}^2]. \quad (7.3.7)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})^2] &= E[X(X - \hat{X}) - \hat{X}(X - \hat{X})] \\ &= E[X(X - \hat{X})] - E[\hat{X}(X - \hat{X})] \\ &= E[X(X - \hat{X})] \quad (\text{erste Formel}) \\ &= E[X^2] - E[X\hat{X}] \\ &= E[X^2] - E[(X - \hat{X} + \hat{X})\hat{X}] \\ &= E[X^2] - E[(X - \hat{X})\hat{X}] - E[\hat{X}^2] \\ &= E[X^2] - E[\hat{X}^2] \quad (\text{zweite Formel}), \end{aligned}$$

wobei wir zweimal die Tatsache gebraucht haben, dass $X - \hat{X}$ in \mathbf{U}^\perp ist, und damit orthogonal zu \hat{X} ist, welches in \mathbf{U} ist. \circ

7.4. Zwei nützliche Eigenschaften des linearen minimalen mittleren quadratischen Fehler-Schätzwertes

In diesem Abschnitt zeigen wir zwei Eigenschaften des linearen minimalen mittleren quadratischen Fehler-Schätzwertes, die sehr nützlich in Anwendungen sind. Der Einfachheit halber werden wir oft "linearer minimaler mittlerer quadratischer Fehler" als LMMSE und den entsprechenden Schätzwert als LMMSEE (linear minimum mean-squared-error estimate) abkürzen.

Linearitäts-Eigenschaft der LMMSE Schätzung: Wenn X_A die LMMSE Schätzung von X_A von der Beobachtung $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ist und X_B die LMMSE Schätzung von X_B von der gleichen Beobachtung ist, dann ist $X = aX_A + bX_B$ die LMMSE Schätzung von $X = aX_A + bX_B$ von $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, für irgendwelche reellen Konstanten a und b .

Beweis: Es folgt aus der Voraussetzung und dem Orthogonalitätsprinzip, dass

$$E\left[Y_i(X_A - X_A)\right] = E\left[Y_i(X_B - X_B)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ist. Folglich ist, mit der Linearität des Erwartungswertes,

$$E\left[Y_i(aX_A - aX_A + bX_B - bX_B)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

oder, gleichbedeutend,

$$E\left[Y_i(X - X)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Somit ist, nach dem Orthogonalitätsprinzip, X tatsächlich die LMMSE Schätzung von X .o

Die nächste Eigenschaft von LMMSE Schätzwerten ist weniger offensichtlich, aber extrem nützlich. Im wesentlichen besagt sie, dass man manchmal die LMMSE Schätzung entweder in einer "divide and conquer" Art oder in einer "conquer, then divide" Art ausführen kann, je nachdem welche passender ist.

Zerlegungs-Eigenschaft der LMMSE Schätzung: Wir nehmen an, dass sich die Beobachtung $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_L, Y_{L+1}, \dots, Y_m)$ in zwei orthogonale Teile $\underline{Y}_A = (Y_1, \dots, Y_L)$ und $\underline{Y}_B = (Y_{L+1}, \dots, Y_m)$ trennen lässt:

$$E[Y_i Y_j] = 0, \quad 1 \leq i \leq L, \quad L+1 \leq j \leq m. \quad (7.4.1)$$

Dann kann jedes X in $\mathbf{U} = \mathcal{S}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ eindeutig als $X = X_A + X_B$ geschrieben werden, wobei $X_A \in \mathbf{U}_A = \mathcal{S}(Y_1, \dots, Y_L)$ und $X_B \in \mathbf{U}_B = \mathcal{S}(Y_{L+1}, \dots, Y_m)$ ist, überdies ist X der LMMSE Schätzwert von X der Beobachtung \underline{Y} genau dann, wenn X_A der LMMSEE von X der Beobachtung \underline{Y}_A und auch X_B der LMMSEE von X der Beobachtung \underline{Y}_B ist. Ob X der LMMSEE von X ist oder nicht, es gilt die Beziehung

$$E[X^2] = E[X_A^2] + E[X_B^2]. \quad (7.4.2)$$

Beweis: Es folgt aus Lemma 2 und (7.4.1), dass $Y_j \in \mathbf{U}_A^\perp$ für $L+1 \leq j \leq m$ ist, und dass $Y_i \in \mathbf{U}_B^\perp$ für $1 \leq i \leq L$, ist. Somit folgt, wieder aus Lemma 2,

$$\mathbf{U}_B \subseteq \mathbf{U}_A^\perp \quad (7.4.3a)$$

und

$$\mathbf{U}_A \subseteq \mathbf{U}_B^\perp. \quad (7.4.3b)$$

Vom Zerlegungstheorem für Zufallsgrößen folgt nun, dass X eindeutig als $X_A + X_B$ geschrieben werden kann.

Somit sind X_A und X_B orthogonal, so dass

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(X_A + X_B)^2] \\ &= E[X_A^2 + 2X_A X_B + X_B^2] \\ &= E[X_A^2] + 2E[X_A X_B] + E[X_B^2] \\ &= E[X_A^2] + E[X_B^2], \end{aligned}$$

was (7.4.2) beweist.

Als nächstes beachten wir, dass

$$\begin{aligned} E[Y_i(X - X)] &= E[Y_i(X - X_A - X_B)] \\ &= E[Y_i(X - X_A)] - E[Y_i X_B] \\ &= E[Y_i(X - X_A)], \quad 1 \leq i \leq L \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

ist, weil $X_B \in \mathbf{U}_A^\perp$ ist. Analog ist

$$E\left[Y_j(X - X)\right] = E\left[Y_j(X - X_B)\right], \quad L + 1 \leq j \leq m. \quad (7.4.5)$$

Es folgt nun aus (7.4.4), (7.4.5) und dem Orthogonalitätsprinzip, dass X die LMMSE Schätzung von X von \underline{Y} genau dann ist, wenn X_A die LMMSE Schätzung von X aus \underline{Y}_A und X_B die LMMSE Schätzung von X aus \underline{Y}_B ist. \circ

Es wird dem Leser geraten, über die obigen zwei Eigenschaften der LMMSE Schätzung nachzudenken, um die Ähnlichkeit und, noch wichtiger, den Unterschied zwischen ihnen zu verstehen.

7.5. Wiener Filterung

Das allgemeine Problem der Wiener Filterung kann folgendermassen beschrieben werden: Wir möchten einen Zufallsprozess $X[.]$ schätzen, indem wir einen Zufallsprozess $Y[.]$ beobachten, wobei $X[.]$ und $Y[.]$ gemeinsam schwach stationäre Prozesse sind (eine Annahme, die durchwegs in unserem Studium über Wiener Filterung gilt). Die Schätzung soll der Ausgang eines LDS sein, dessen Eingangssignal $Y[.]$ ist, und überdies erlauben wir eine Verzögerung d in unserer Schätzung, so dass der Ausgang unseres LDS mit $X[. - d]$ gekennzeichnet wird. Wir werden sogar erlauben, dass d negativ ist, in welchem Fall unser LDS eine *Voraussage* des stochastischen Prozesses $X[.]$ macht. Wir wollen jedoch gewisse Einschränkungen unseres schätzenden LDS in Betracht ziehen, zum Beispiel, dass es kausal ist oder dass es einen spezifizierten Speicher hat. Am wichtigsten ist, dass für jedes k das Ausgangssignal $X[k - d]$ unseres LDS die LMMSE Schätzung von $X[k - d]$ aus der innerhalb der Einschränkungen des LDS erlaubten Beobachtung ist; nur in diesem Fall werden wir das LDS ein "Wiener Filter" nennen, zu Ehren des M.I.T. Mathematikers Norbert Wiener, der während des Zweiten Weltkrieges als erster die Theorie einer solchen Schätzung entwickelte, als er am Problem des Zielens mit Flugabwehrkanonen von Schiffen arbeitete. Die Theorie hat seitdem viele friedfertige Anwendungen gefunden.

7.5.1. FIR Wiener Filter

Als *FIR Filter* der Ordnung M (oder weniger) bezeichnet man ein kausales LDS, dessen Kronecker-Delta-Antwort $h[.]$ die Bedingung

$$h[k] = 0, \quad k < 0 \quad \text{und} \quad k > M \quad (7.5.1)$$

erfüllt. Die Ordnung ist exakt gleich M , wenn $h[M] \neq 0$. Der Ausdruck FIR ist die Abkürzung von "finite impulse response", welches eine sehr irreführende Terminologie für zeitdiskrete Systeme ist, aber sie wird so universell gebraucht, dass es sinnlos ist, sich ihrem Gebrauch zu widersetzen.

Wenn der stochastische Prozess $Y[.]$ das Eingangssignal eines FIR Filters der Ordnung M (oder weniger) ist, dann ist der ausgangsseitige stochastische Prozess $Z[.]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt durch

$$Z[k] = h[0]Y[k] + h[1]Y[k - 1] + \dots + h[M]Y[k - M]. \quad (7.5.2)$$

Damit $Z[k] = X[k-d]$ die LMMSE Schätzung von $X[k-d]$ aus den Daten $(Y[k], Y[k-1], \dots, Y[k-M])$ ist, die für das FIR Filter zur Zeit k verfügbar sind, muss gemäss dem Orthogonalitätsprinzip als hinreichende und notwendige Bedingung das System von Orthogonalitätsgleichungen

$$E[(X[k-d] - Z[k])Y[k-i]] = 0, \quad 0 \leq i \leq M$$

oder, gleichwertig,

$$E[(Z[k]Y[k-i])] = E[(X[k-d]Y[k-i])], \quad 0 \leq i \leq M \quad (7.5.3)$$

erfüllt sein. Wenn wir (7.5.2) in (7.5.3) einsetzen, ergibt sich das gleichwertige System von Orthogonalitätsgleichungen

$$\sum_{j=0}^M h[j]E[Y[k-j]Y[k-i]] = E[X[k-d]Y[k-i]], \quad 0 \leq i \leq M,$$

das wir einfacher als

$$\sum_{j=0}^M h[j]R_Y[i-j] = R_{XY}[i-d], \quad 0 \leq i \leq M \quad (7.5.4)$$

schreiben können. Dieses System von Orthogonalitätsgleichungen (7.5.4) wird *Wiener-Hopf-Gleichung für FIR Filterung* genannt. Wir können diese Gleichung in Matrixform als

$$\begin{bmatrix} R_Y[0] & R_Y[1] & \dots & R_Y[M] \\ R_Y[1] & R_Y[0] & \dots & R_Y[M-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_Y[M] & R_Y[M-1] & \dots & R_Y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}[-d] \\ R_{XY}[1-d] \\ \vdots \\ R_{XY}[M-d] \end{bmatrix} \quad (7.5.5)$$

schreiben, wobei wir von der Tatsache, dass $R_Y[-k] = R_Y[k]$, Gebrauch gemacht haben. Wir wissen, dass die LMMSE Schätzung $X[k-d]$ von $X[k-d]$ eindeutig ist, folglich wird (7.5.5) immer Lösungen für den Koeffizientenvektor $(h[0], h[1], \dots, h[M])$ haben. Der Koeffizientenvektor jedoch, das heisst das FIR Wiener Filter, wird genau dann eindeutig sein, wenn $Y[k], Y[k-1], \dots, Y[k-M]$ linear unabhängig sind. Folglich sehen wir jetzt, dass die Zufallsgrössen $Y[k], Y[k-1], \dots, Y[k-M]$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die Matrix in (7.5.5), welche wir *Autokorrelationsmatrix* der Beobachtung $Y[k], Y[k-1], \dots, Y[k-M]$ nennen, invertierbar ist.

Es bleibt, den mittleren quadratischen Fehler (MSE) des Wiener Filters zu berechnen. Dazu eignet sich Gleichung (7.3.6):

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= E[X[k-d](X[k-d] - Z[k])] \\ &= E[X[k-d]X[k-d]] - E\left[X[k-d] \sum_{i=0}^M h[i]Y[k-i]\right] \\ &= R_X[0] - \sum_{i=0}^M h[i]R_{XY}[i-d]. \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Dies ist der MSE der Schätzung des FIR Wiener Filters der Ordnung M (oder weniger) zu jedem Zeitpunkt k .

7.5.2. Nichtkausales Wiener Filter

Wir betrachten nun den Fall ohne Einschränkungen des schätzenden LDS (ausser Stabilität), so dass die Antwort $Z[\cdot]$ auf den eingangsseitigen stochastischen Prozess $Y[\cdot]$ durch

$$Z[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]Y[k-i], \text{ alle } k \in \mathbb{Z} \quad (7.5.7)$$

gegeben ist. Damit $Z[k] = X[k-d]$ die LMMSE Schätzung von $X[k-d]$ aus der vollständigen Beobachtung $(\dots, Y[-1], Y[0], Y[1], \dots)$, "past, present and future", die dem schätzenden Filter zur Zeit k zur Verfügung steht, ist, müssen die Orthogonalitätsgleichungen

$$E[Z[k]Y[k-i]] = E[X[k-d]Y[k-i]], \text{ alle } i \in \mathbb{Z} \quad (7.5.8)$$

erfüllt sein, welche sich von (7.5.3) nur im Bereich von i unterscheiden. Wenn wir (7.5.7) in (7.5.8) einsetzen und vereinfachen, ergibt sich die *Wiener-Hopf Gleichung für nichtkausale Wiener Filterung*:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j]R_Y[i-j] = R_{XY}[i-d], \text{ alle } i \in \mathbb{Z}. \quad (7.5.9)$$

Weil die Wiener-Hopf Gleichung (7.5.9) für *alle* $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt wird, kann sie einfach als

$$h[\cdot] * R_Y[\cdot] = R_{XY}[\cdot - d]. \quad (7.5.10)$$

neu geschrieben werden. Folglich können wir, angenommen, dass $R_Y[\cdot]$ eine stabile zeitdiskrete Funktion ist, so dass ihre z -Transformierte $S_Y(z)$ existiert [und $\text{ROC}(R_Y[\cdot])$ somit auch den Einheitskreis enthält], die Gleichung (7.5.10) z -transformieren, um die *Beschreibung des nichtkausalen Wiener Filters im Frequenzbereich* als

$$H(z) = \frac{z^{-d}S_{XY}(z)}{S_Y(z)} \quad (7.5.11)$$

zu erhalten. Dabei verlangen wir, dass der Einheitskreis $\{z : |z| = 1\}$ in der $\text{ROC}(h[\cdot])$ liegt. Man sieht, dass die nichtkausale Wiener Filterung in der Tat sehr einfach ist! Dasselbe Vorgehen, das zu (7.5.6) führte, ergibt jetzt

$$\text{MSE} = R_X[0] - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] R_{XY}[i-d]$$

als den MSE des nichtkausalen Wiener Filters, welchen wir, wegen $R_{XY}[k] = R_{YX}[-k]$, auch als

$$\text{MSE} = R_X[0] - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] R_{YX}[d-i] \quad (7.5.12)$$

schreiben können, um die Faltungsnatur der Summe besser zum Ausdruck zu bringen.

7.5.3. Kausales Wiener Filter

Wieners Bericht über seine neuen Filtermethoden, geschrieben während des Zweiten Weltkriegs, wurde als "yellow peril" ("gelbe Gefahr") bekannt - weil er in einen gelben Einband gebunden war, und weil er, besonders für kausale Filterung, enorm schwierig zu verstehen war. Das *kausale* LDS für lineare MMSE Schätzung zu finden, schien ein mathematisches Problem von aussergewöhnlicher Komplexität zu sein, obwohl die Lösung in der Regel ziemlich einfach war, nachdem sie einmal gefunden wurde. Glücklicherweise haben zwei Forscher am Bell Telephone Laboratorium, Hendrik Bode und Claude Shannon, im Jahre 1950 die Wiener Theorie für den kausalen Fall in einer einfach zu verstehenden und einfach anzuwendenden Art neu formuliert. Wir gehen der "yellow peril" aus dem Weg und folgen der Bode-Shannon Methode.

Unsere einzige Einschränkung an das schätzende Filter $h[\cdot]$ ist nun, dass $h[\cdot]$ *kausal* ist, so dass seine Antwort $Z[\cdot]$ auf den Beobachtungsprozess $Y[\cdot]$ als

$$Z[k] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] Y[k-i], \text{ alle } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.5.13)$$

geschrieben werden kann. Nach dem Orthogonalitätsprinzip wird $Z[k] = X[k-d]$ genau dann die LMMSE Schätzung von $X[k-d]$ sein, wenn der Fehler $X[k-d] - Z[k]$ orthogonal zu allen Komponenten der Beobachtung ($Y[k], Y[k-1], Y[k-2], \dots$) ist, die dem kausalen Filter zur Zeit k zur Verfügung stehen, das heisst

$$E[Z[k]Y[k-i]] = E[X[k-d]Y[k-i]], \text{ alle } i \geq 0. \quad (7.5.14)$$

Wenn wir (7.5.13) in (7.5.14) einsetzen und vereinfachen, ergibt sich die *Wiener-Hopf Gleichung für kausale Wiener Filterung*:

$$\sum_{j=0}^{\infty} h[j] R_Y[i-j] = R_{XY}[i-d], \text{ alle } i \geq 0. \quad (7.5.15)$$

Weil (7.5.15) nur für *nichtnegative* ganze Zahlen gültig ist, können wir (7.5.15) nicht als Faltung schreiben, in der Art, wie wir es für Gleichung (7.5.9) taten, welche sich von (7.5.15) nur darin unterscheidet, dass sie für *alle* ganzen Zahlen gilt. Diese Tatsache ist es, die die Wiener Theorie für das kausale Filter schwierig macht; wir können die Wiener-Hopf Gleichung nicht lösen, indem wir einfach die z -Transformierten nehmen, ein weiterer Trick wird benötigt.

Bode-Shannon Trick – erste Hälfte. Wenn der Beobachtungsprozess $Y[\cdot]$ weisses Rauschen ist, dann ist das kausale Wiener Filter $h_c[\cdot]$ für die LMMSE Schätzung von $X[\cdot-d]$ aus $Y[\cdot]$ der kausale Teil des nichtkausalen Wiener Filters für die LMMSE Schätzung von $X[\cdot-d]$ aus $Y[\cdot]$:

$$h_c[k] = \begin{cases} h_{nc}[k], & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} .$$

Beweis: Gemäss der Definition von weissem Rauschen hat der Beobachtungsprozess $Y[.]$ eine Autokorrelationsfunktion der Form

$$R_Y[.] = L\delta[.], \quad (7.5.16)$$

wobei L die durchschnittliche Leistung von $Y[.]$ ist. Betrachten wir nun die Aufspaltung der Beobachtung $(\dots Y[k+1], Y[k], Y[k-1], \dots)$, die dem nichtkausalen Filter zur Zeit k zur Verfügung steht, in zwei Teile

$$\underline{Y}_A = (Y[k], Y[k-1], Y[k-2], \dots)$$

und

$$\underline{Y}_B = (Y[k+1], Y[k+2], Y[k+3], \dots).$$

Als nächstes nehmen wir an, dass $Y[i]$ eine Komponente von \underline{Y}_A und $Y[j]$ eine Komponente von \underline{Y}_B ist, das heisst, dass $i \leq k$ und $j > k$. Dann ist

$$E[Y[j]Y[i]] = R_Y[j-i] = 0,$$

weil (7.5.16) und $i \neq j$ gelten. Folglich besagt die Zerlegungs-Eigenschaft der LMMSE Schätzung unmittelbar, dass, wenn

$$\begin{aligned} X[k-d] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{nc}[i] Y[k-i] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} h_{nc}[i] Y[k-i] + \sum_{i=-\infty}^{-1} h_{nc}[i] Y[k-i] \end{aligned}$$

die nichtkausale LMMSE Schätzung von $X[k-d]$ ist, dann ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_{nc}[i] Y[k-i]$$

die kausale LMMSE Schätzung von $X[k-d]$. \circ

Der nächste Schritt zum kausalen Wiener Filter ist fast offensichtlich. Wenn die Beobachtung $Y[.]$ kein weisses Rauschen ist, dann sollten wir sie weiss machen. Wir müssen ein *kausales* Filter mit Kronecker-Delta-Antwort $g[.]$ einsetzen, um diese "Weissmachung" ("whitening") durchzuführen, so dass dieses Filter mit dem kausalen Wiener Filter für den nun weissen Prozess $W[.]$ kombiniert werden kann, um ein kausales Wiener Filter für den ursprünglichen Beobachtungsprozess zu schaffen. Weil $\text{ROC}(R_Y[.])$ und $\text{ROC}(R_W[.])$ immer den Einheitskreis enthalten müssen, müssen wir darauf bestehen, dass $g[.]$ eine *stabile zeitdiskrete Funktion* ist. Weniger offensichtlich müssen wir, damit wir sicher sind, dass nichts in $Y[.]$, das für die kausale LMMSE Schätzung von $X[.-d]$ nützlich ist, durch das Weissmachen verloren geht, fordern, dass das "whitening" Filter eine *kausale Inverse* hat, welche ebenso eine stabile Kronecker-Delta-Antwort haben muss. Diese Überlegungen sind Anlass für die folgende Definition.

Definition: Ein LDS mit Kronecker-Delta-Antwort $g[\cdot]$ ist ein "whitening filter" für den schwach stationären stochastischen Prozess $Y[\cdot]$ mit dem Leistungsdichtespektrum $S_Y(z)$, wenn

- (i) $g[\cdot]$ eine kausale stabile zeitdiskrete Funktion ist;
- (ii) es ein inverses Filter mit Übertragungsfunktion $\frac{1}{G(z)}$ gibt, dessen Kronecker-Delta-Antwort $g_{\text{inv}}[\cdot]$ ebenso eine kausale stabile zeitdiskrete Funktion ist;
- (iii) $S_Y(z) G(z) G(z^{-1}) = 1$, alle $z \in \mathbb{C}$. (7.5.17)

Gemäss (5.5.3a) ist die linke Seite von (7.5.17) das Leistungsdichtespektrum $S_w(\cdot)$ des Ausgangssignals $W[\cdot]$ des "whitening" Filters, dessen Eingangssignal $Y[\cdot]$ ist. Somit garantiert (7.5.17), dass die Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses $W[\cdot]$ des "whitening" Filters

$$R_w[\cdot] = \delta[\cdot] \quad (7.5.18)$$

ist. Weil $S_Y(z)$ existiert, muss $m_Y = 0$ sein. Folglich garantiert (5.3.10), dass auch $m_w = 0$ ist. Somit ist der Ausgang $W[\cdot]$ tatsächlich weisses Rauschen mit Durchschnittsleistung 1. (In diesem Abschnitt haben wir die übliche Praxis befolgt, $S_Y(z)$ das *Leistungsdichtespektrum* von $Y[\cdot]$ zu nennen.)

Wir werden bald sehen, wie man ein "whitening" Filter für alle wesentlichen schwach stationären stochastischen Prozesse findet. Zuerst jedoch betrachten wir die Bedeutung des "whitening" Filters für die kausale LMMSE Schätzung.

Bode-Shannon Trick – zweite Hälfte. Wenn $g[\cdot]$ ein "whitening" Filter für den Beobachtungsprozess $Y[\cdot]$ ist, und $h_{wc}[\cdot]$ der kausale Teil des nichtkausalen Wiener Filters $h_{wnc}[\cdot]$ für die LMMSE Schätzung von $X[\cdot - d]$ aus dem "weissgemachten" Prozess $W[\cdot]$ ist, dann ist die Reihenschaltung

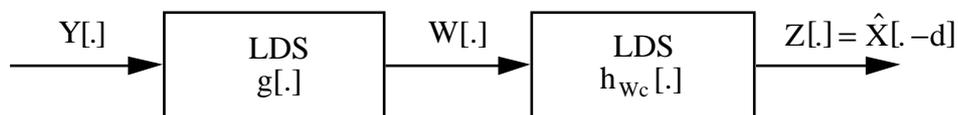


Fig.7.5.1: Bode-Shannon Form des kausalen Wiener Filters.

des "whitening" Filters $g[\cdot]$ mit dem "causal-part filter" $h_{wc}[\cdot]$ das kausale Wiener Filter für die LMMSE Schätzung von $X[\cdot - d]$ aus $Y[\cdot]$. Folglich hat das kausale Wienerfilter die Übertragungsfunktion

$$H(z) = G(z)H_{wc}(z).$$

Überdies hat das nichtkausale Wiener Filter $h_{wnc}[\cdot]$ die Übertragungsfunktion

$$H_{wnc}(z) = z^{-d}G(z^{-1})S_{XY}(z). \quad (7.5.19)$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass das kausale Wiener Filter für die Beobachtung $W[\cdot]$ die gleiche Schätzung liefert wie das kausale Wiener Filter $\tilde{h}[\cdot]$ für die Beobachtung $Y[\cdot]$. Das letztgenannte Filter können wir folgendermassen darstellen:

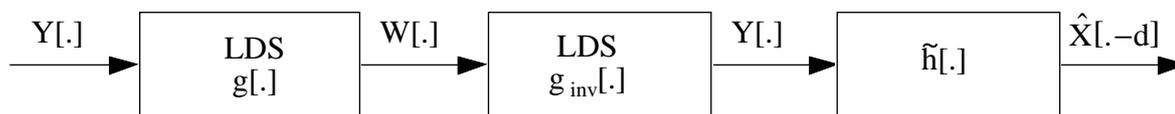


Fig. 7.5.2: Ein äquivalentes Filter für $\tilde{h}[\cdot]$.

Aus Fig. 7.5.2 sehen wir, dass das kausale Wiener Filter für die Beobachtung $Y[\cdot]$ auch als kausales Filter $g_{inv}[\cdot] * \tilde{h}[\cdot]$ betrachtet werden kann, das mit der Beobachtung $W[\cdot]$ rechnet (deshalb verlangen wir, dass $g_{inv}[\cdot]$ eine *kausale* zeitdiskrete Funktion sei). Somit kann das beste kausale Filter $h_{wc}[\cdot]$ für die Beobachtung $W[\cdot]$ keinen grösseren MSE ergeben als $\tilde{h}[\cdot]$. Aber es kann auch nicht einen kleineren MSE als $\tilde{h}[\cdot]$ ergeben, weil $\tilde{h}[\cdot]$ nach Voraussetzung ein optimaler kausaler linearer Schätzer für die Beobachtung $Y[\cdot]$ ist. Wir folgern, dass die Kaskade von $g[\cdot]$ und $h_{wc}[\cdot]$ tatsächlich einen kausalen linearen MMSE Schätzwert von $X[\cdot - d]$ erzeugt.

Es bleibt, (7.5.19) zu rechtfertigen. Wir beginnen mit der Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion (wie in (7.5.11) vorgeschlagen, wobei wir uns daran erinnern, dass jetzt $W[\cdot]$ der Prozess am Eingang unseres nichtkausalen Wiener Filters ist):

$$\begin{aligned}
R_{XW}[k] &= E[X[i+k]W[i]] \\
&= E\left[X[i+k] \sum_{j=0}^{\infty} g[j] Y[i-j]\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} g[j] E[X[i+k] Y[i-j]] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} g[j] R_{XY}[k+j] \\
&= \sum_{i=-\infty}^0 g[-i] R_{XY}[k-i], \quad \text{alle } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Weil diese Gleichung für alle ganzen Zahlen k gilt, kann sie als Faltung

$$R_{XW}[\cdot] = g[-\cdot] * R_{XY}[\cdot] \quad (7.5.20)$$

geschrieben werden. Wenn wir (7.5.20) z -transformieren und die Zeitumkehr-Eigenschaft gebrauchen, ergibt sich

$$S_{XW}(z) = G(z^{-1}) S_{XY}(z).$$

Wenn wir diesen Ausdruck für $S_{XW}(z)$ zusammen mit $S_W(z) = 1$ in (7.5.11) einsetzen, ergibt sich jetzt (7.5.19) wie gewünscht. \circ

Beispiel 7.5.1: Sei $R_{XY}[\cdot] = \frac{1}{2} \delta[\cdot+1] + \frac{5}{4} \delta[\cdot] + \frac{1}{2} \delta[\cdot-1]$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{XY}(z) &= \frac{1}{2} z + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} z^{-1} \\
&= \frac{1}{2z} \left(z^2 + \frac{5}{2} z + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2z} (z+2) \left(z + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Des weiteren sei $d = -1$ und

$$G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

ein "whitening" Filter für $Y[\cdot]$. Dann ist

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{z^{-1} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{z+2},$$

so dass (7.5.19)

$$H_{Wnc}(z) = z^{-d} \frac{z + \frac{1}{2}}{z} = z + \frac{1}{2}$$

ergibt. Somit ist

$$h_{Wnc}[\cdot] = \delta[\cdot+1] + \frac{1}{2} \delta[\cdot],$$

so dass der kausale Teil dieses nichtkausalen Wiener Filters

$$h_c[.] = \frac{1}{2} \delta[.]$$

ist. Folglich hat das kausale Wiener Filter für die Beobachtung $Y[.]$ die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z)H_c(z) \\ &= \frac{1}{2}G(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist das kausale Wiener Filter nur geringfügig vom "whitening" Filter selbst verschieden. Der Leser sollte sich selbst überzeugen, dass, wenn wir $d = -2$ gewählt hätten (two-step prediction), das kausale Wiener Filter $H(z) = 0$ geworden wäre (das heisst $Z[k] = X[k+2] = 0$, für alle k), und wenn wir $d = 0$ gewählt hätten, (einfache Filterung), dann wäre $H(z) = 1$ (so, dass das kausale Wiener Filter ein "gerades Drahtstück" wäre).

Um unsere Diskussion der kausalen Wiener Filterung zu vervollständigen, bleibt uns zu zeigen, wie man ein "whitening" Filter für den Beobachtungsprozess $Y[.]$ finden kann. Zuerst beweisen wir eine nützliche Tatsache.

Charakterisierung eines kausalen stabilen LDS mit einer rationalen Übertragungsfunktion: Es gibt genau dann ein kausales und stabiles LDS mit rationaler Übertragungsfunktion $H(z)$, wenn

- (i) alle Pole von $H(z)$ im Innern des Einheitskreises $\{z : |z| = 1\}$ liegen, und
- (ii) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z)$ existiert. (7.5.21)

Beweis: Wenn wir die Partialbruchzerlegung von $H(z)$ betrachten, folgt, dass es genau dann ein stabiles *rechtsseitiges* Signal $h[.]$ mit der z -Transformierten $H(z)$ gibt, wenn die Pole von $H(z)$ strikt innerhalb des Einheitskreises liegen. Aber wenn $h[.]$ rechtsseitig ist, ist seine Laurentreihe

$$H(z) = h[m]z^{-m} + h[m+1]z^{-m-1} + \dots, \quad (7.5.22)$$

wobei $h[m] \neq 0$ ist, und diese Reihe muss auf und überall ausserhalb des Einheitskreises konvergieren. Somit muss der Grenzwert in (7.5.21) existieren; dies ist nach (7.5.22) genau dann der Fall, wenn $m \geq 0$ ist, also wenn $h[.]$ eine kausale zeitdiskrete Funktion ist. \circ

Als ein Folgesatz [corollary] dieser Charakterisierung von kausalen, stabilen Systemen, erhalten wir unmittelbar die folgende Charakterisierung von "whitening" Filtern.

Charakterisierung von "whitening" Filtern mit rationaler Übertragungsfunktion: Es gibt genau dann ein "whitening" Filter $g[\cdot]$ mit rationaler Übertragungsfunktion $G(z)$, wenn

- (i) alle Pole und Nullstellen von $G(z)$ im Innern des Einheitskreises liegen, und
 (ii) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z)$ existiert und ungleich null ist. (7.5.23)

Überdies ist dieses "whitening" Filter (wenn es existiert) ein "whitening" Filter für den schwach stationären stochastischen Prozess mit Leistungsdichtespektrum

$$S_Y(z) = \frac{1}{G(z)G(z^{-1})}. \quad (7.5.24)$$

Beweis: Teile (i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass, wenn $g[\cdot]$ ein "whitening" Filter ist, sowohl $G(z)$ als auch $1/G(z)$ stabile kausale Signale beschreiben müssen. Dass es einen schwach stationären stochastischen Prozess $Y[\cdot]$ mit Leistungsspektrum, gegeben durch (7.5.24), gibt, folgt aus der Tatsache, dass, wenn man weißes Rauschen mit durchschnittlicher Leistung eins am Eingang des inversen "whitening" Filters $g_{\text{inv}}[\cdot]$ mit Übertragungsfunktion $G_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{G(z)}$ anlegt, der Ausgangsprozess $Y[\cdot]$ genau das Spektrum nach (7.5.24) hat, wie aus (5.5.3a) folgt. Wenn man $Y[\cdot]$ durch ein Filter mit Übertragungsfunktion $G(z)$ schickt, ergibt sich weißes Rauschen mit durchschnittlicher Leistung eins, so, dass $g[\cdot]$ tatsächlich das "whitening" Filter für $Y[\cdot]$ ist. \circ

Es ist nun (im Prinzip) eine einfache Sache, das "whitening" Filter für irgendeinen schwach stationären Zufallsprozess mit einem rationalen Leistungsdichtespektrum zu finden.

Finden eines "whitening" Filters von einem rationalen Leistungsdichtespektrum: Wenn $Y[\cdot]$ ein schwach stationärer stochastischer Prozess ist, dessen spektrale Leistungsdichte $S_Y(z)$ eine rationale Funktion ohne Nullstellen und Polstellen auf dem Einheitskreis ist, dann kann $S_Y(z)$ als

$$S_Y(z) = F(z)F(z^{-1}) \quad (7.5.25)$$

geschrieben werden, wobei $F(z)$ die rationale Funktion ist, deren Pole und Nullstellen alle Pole und Nullstellen von $S_Y(z)$ sind, die im Innern des Einheitskreises liegen. Überdies ist

$$G(z) = \frac{z^n}{F(z)}, \quad (7.5.26)$$

wobei n so gewählt wird, dass die Grade des Zähler- und Nenner-Polynoms der rationalen Funktion $G(z)$ gleich sind, ein "whitening" Filter für $Y[\cdot]$.

Beispiel 7.5.2: Sei

$$\begin{aligned} S_Y(z) &= \frac{z^2 + \frac{5}{2}z + 1}{2z} \\ &= \frac{(z + \frac{1}{2})(z + 2)}{2z} \end{aligned}$$

Dann muss das "whitening" Filter für $Y[\cdot]$ mit (7.5.26) die Form

$$G(z) = c \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

mit einer bestimmten Konstante c haben. Eine einfache Rechnung gibt:

$$G(z)G(z^{-1}) = c^2 \frac{2z}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)} = S_Y(z)^{-1},$$

so dass $c^2 = 1$ verlangt wird. Wenn wir $c = +1$ wählen ($c = -1$ ist auch eine gültige Wahl) ergibt sich das "whitening" Filter

$$G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}},$$

welches wir in Beispiel 7.5.1 hatten.

Beweis: Wir erinnern uns von (5.2.4) daran, dass eine Autokorrelationsfunktion immer eine *gerade* Funktion ist:

$$R_Y[-k] = R_Y[k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt dann aus der Zeitumkehr-Eigenschaft der z -Transformation, dass

$$S_Y(z^{-1}) = S_Y(z) \tag{7.5.27}$$

ist. Wir nehmen an, dass $S_Y(z)$ eine rationale Funktion ist, und dass z_0 (wobei $|z_0| \neq 1$) ein Pol von $S_Y(z)$ mit Vielfachheit μ ist, das heisst, dass $(z - z_0)^\mu$ ein Faktor des Nenners von $S_Y(z)$ ist. Es folgt aus (7.5.27), dass

$$\begin{aligned} (z^{-1} - z_0)^\mu &= (-z_0 z^{-1} (z - z_0^{-1}))^\mu \\ &= (-z_0)^\mu z^{-\mu} (z - z_0^{-1})^\mu \end{aligned}$$

auch ein Faktor von $S_Y(z)$ ist, das heisst, dass z_0^{-1} auch ein Pol von $S_Y(z)$ mit Vielfachheit μ ist. Dieselbe Beweisführung zeigt, dass, wenn z_0 eine Nullstelle von $S_Y(z)$ mit Vielfachheit μ ist, ihr Kehrwert z_0^{-1} auch eine Nullstelle von $S_Y(z)$ mit Vielfachheit μ ist. Mit anderen Worten heisst das, dass *die Pole von $S_Y(z)$ (wie auch die Nullstellen) in reziproken Paaren auftreten*. Folglich, wenn $F(z)$ eine rationale Funktion ist, die alle Pole und Nullstellen von $S_Y(z)$, die im Innern des Einheitskreises liegen, enthält, dann enthält $F(z^{-1})$, welche eine rationale Funktion ist, deren Pole und Nullstellen reziprok zu denen von $F(z)$ sind, gerade alle übrigen Pole und Nullstellen von $S_Y(z)$. Folglich erhalten wir, mit der richtigen Wahl eines konstanten Multiplikators in der rationalen Funktion $F(z)$

$$S_Y(z) = F(z) \cdot F(z^{-1}), \quad (7.5.28)$$

wie behauptet. Weil $\text{ROC}(R_Y[\cdot])$ den Einheitskreis beinhalten muss, wissen wir, dass $S_Y(z)$ und folglich auch $F(z)$ keine Pole auf dem Einheitskreis haben können. Aber das Filter mit Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^n}{F(z)} \quad (7.5.29)$$

muss einer stabilen zeitdiskreten Funktion entsprechen, wenn es ein "whitening" Filter sein soll, und folglich kann $G(z)$ keine Pole auf dem Einheitskreis haben oder, gleichwertig, können $F(z)$ und $S_Y(z)$ keine Nullstellen auf dem Einheitskreis haben. Es folgt aus unserer Charakterisierung von "whitening" Filtern mit rationaler Übertragungsfunktion, dass $G(z)$, wie durch (7.5.29) gegeben, genau dann ein mögliches "whitening" Filter ist, wenn n so gewählt wird, dass $G(z)$ eine rationale Funktion ist, deren Zähler- und Nenner-Polynom den gleichen Grad haben. Überdies gibt (7.5.29)

$$G(z) \cdot G(z^{-1}) = \frac{z^n}{F(z)} \frac{z^{-n}}{F(z^{-1})} = \frac{1}{S_Y(z)},$$

so dass dann $G(z)$ tatsächlich ein "whitening" Filter für $Y[\cdot]$ ist. \circ

Die Forderung, dass $S_Y(z)$ keine Nullstellen auf dem Einheitskreis hat, um ein "whitening" Filter mit der obigen Methode zu finden, ist fundamental. Wenn $S_Y(z)$ eine Nullstelle bei $z = e^{j\Omega_0}$ hat, dann verschwindet die spektrale Leistungsdichte bei dieser Frequenz:

$$\frac{1}{2\pi} S_Y(e^{j\Omega_0}) = 0.$$

Folglich gibt es kein lineares Filter $H(z)$, das diesen Prozess weiss machen kann, da dies $S_Y(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = 1$ für alle Ω , $-\pi < \Omega \leq \pi$, erfordern würde.

Hiermit sind wir am Ende unserer Diskussion über Wiener Filterung angelangt. Der Leser wird sicherlich bemerkt haben, dass man den Bode-Shannon Trick, um ein kausales Wiener Filter zu finden, nur dann brauchen kann, wenn $S_Y(z)$ eine rationale Funktion ist. Man kann jedoch eine beliebige spektrale Leistungsdichte $S_Y(z)$ beliebig genau durch eine rationale Funktion mit genügend vielen Polen und Nullstellen approximieren. Somit sind die Methoden, die in diesem Abschnitt beschrieben worden sind, tatsächlich allgemein genug, um das kausale Wiener Filterungsproblem in jeder praktischen Situation zu lösen.

Kapitel 8

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingter Erwartungswert

8.1 Einführung

Im vorangegangenen Kapitel diskutierten wir ausführlich das Problem der linearen minimalen mittleren quadratischen Fehlerschätzung [*LMMSE estimation = Linear Minimum Mean-Squared Error estimation*] sowie der zugehörigen Filterung. Der mittlere quadratische Fehler, das heisst, die durchschnittliche "Energie" eines Fehlers, stellt oft – jedoch nicht immer – diejenige Grösse dar, welche es mittels einer Schätzregel zu minimieren gilt. Ebenso wird vielfach eine *lineare* Schätzregel bevorzugt; aber man muss sich im klaren sein, dass man damit auf eine möglicherweise erheblich bessere Schätzung durch Verwendung einer *nichtlinearen* Schätzregel verzichtet. Wir wollen darum im folgenden allgemeine Gütekriterien für Schätzungen und insbesondere auch nichtlineare Schätzregeln betrachten. Das dafür benötigte Werkzeug ist die Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten, welche wir in diesem Kapitel erörtern. Es ist zu betonen, dass die LMMSE-Schätzung als einzige die Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten *nicht* voraussetzt. In den nachfolgenden Kapiteln wird Wahrscheinlichkeit mit WSK abgekürzt.

8.2 Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmass

In Kapitel 2.2 ist das WSK-System [probability space] als ein Tripel von (Ω, \mathcal{A}, P) eingeführt worden. Dabei bedeutet Ω den Ergebnisraum [sample space], \mathcal{A} die Klasse der Ereignisse [class of events] und P das WSK-Mass [probability measure]. Von \mathcal{A} fordern wir die Eigenschaft einer Sigma Algebra, während P als eine Funktion $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ den drei Axiomen von Kolmogorov genügen muss. Des weiteren ist die WSK des Ereignisses A nichts anderes als der Wert dieser Funktion $P[\cdot]$ für das Argument A aus \mathcal{A} . Wie in Kapitel 2.2 schon erläutert, haben ausschliesslich *Ereignisse* Wahrscheinlichkeiten, und nur das *WSK-Mass* gibt Aufschluss über die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ereignisses. Um letzteren auch Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen, die darauf basieren, dass eine bestimmte Bedingung schon erfüllt ist, liegt es nun nahe, ein bedingtes WSK-Mass zu definieren.

Falls A ein Ereignis ist mit $P[A] > 0$, dann heisst die Funktion

$$P_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.2.1)$$

das bedingte WSK-Mass unter der Bedingung, dass A eintritt. Für alle Ereignisse B in \mathcal{A} gilt

$$P_A[B] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}. \quad (8.2.2)$$

Da $A \cap B$ eine Untermenge von A ist, das heisst $A \cap B \subseteq A$, wissen wir, dass $P[A \cap B] \leq P[A]$. Aber weil $P[A \cap B] \geq 0$ und $P[A] \neq 0$, folgt $P[A] > 0$ und somit auch

$$0 \leq P_A[B] \leq 1 \quad (8.2.3)$$

für jedes Ereignis B in \mathcal{A} . Wir sehen also, dass das bedingte WSK-Mass P_A Axiom (i) von Kolmogorov erfüllt. Weiter gilt $A \cap \Omega = A$, so dass

$$P_A[\Omega] = 1 \quad (8.2.4)$$

in (8.2.2) enthalten ist, was der Anforderung in Axiom (ii) von Kolmogorov entspricht. Seien schliesslich B_1, B_2, B_3, \dots paarweise unvereinbare Ereignisse, (d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$), dann sind auch die Ereignisse $A \cap B_1, A \cap B_2, A \cap B_3, \dots$ paarweise unvereinbar, und es gilt gemäss drittem Axiom von Kolmogorov:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A \cap B_i].$$

Wird diese Formel in (8.2.2) verwendet, so erkennt man, dass auch Axiom (iii) von Kolmogorov erfüllt ist, und man erhält

$$P_A\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P_A[B_i]. \quad (8.2.5)$$

Wir haben gezeigt, dass das bedingte WSK-Mass P_A allen drei Axiomen von Kolmogorov genügt und somit ein gültiges WSK-Mass in der Klasse der Ereignisse \mathcal{A} darstellt. Gleichermassen bildet auch das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ ein WSK-System.

Als nächstes rufen wir uns von Kapitel 2.2 in Erinnerung, dass $P[A]$ intuitiv als Bruch aufgefasst werden kann, dessen Nenner aus einer sehr grossen Anzahl "unabhängiger Versuche" eines Zufallsexperimentes besteht, und dessen Zähler die Anzahl jener Versuche darstellt, bei denen das Ereignis A eintritt. In ähnlicher Weise entspricht $P[A \cap B]$ einem Bruch, dessen Zähler die Anzahl Fälle, dass A und B gleichzeitig auftreten, enthält. $P_A[B] = P[A \cap B]/P[A]$ kann nun als Bruch jener Versuche aufgefasst werden, bei welchen B eintritt, aber nur unter Berücksichtigung jener Versuche, in denen A eintritt. Diese Interpretation liefert nun den Grund, warum wir $P_A[B]$ zu Recht mit "bedingter WSK von B unter der Bedingung, dass A eintritt" bezeichnen.

Da das bedingte WSK-Mass P_A allen Axiomen von Kolmogorov genügt, können wir – in Analogie zum konventionellen WSK-Mass P – entsprechende Erwartungswerte, Verteilungsfunktionen und WSK-Dichten definieren. Bevor wir uns aber dieser Aufgabe zuwenden, wollen wir auf zwei Aspekte des bedingten WSK-Masses eingehen, welche schon des öfters zu Verwirrung geführt haben.

In unserer Definition von $P_A[\cdot]$ forderten wir von A , ein Ereignis mit $P[A] > 0$ zu sein. Es wird manchmal behauptet, dass P_A nicht definiert ist, falls $P[A] = 0$. Die Realität zeigt uns aber in vielen Anwendungen, dass $P_A[\cdot]$ auch im Falle $P[A] = 0$ physikalisch bestimmt ist. Tritt dieser Fall auf, sind aus dem bedingten WSK-Mass berechnete Wahrscheinlichkeiten irrelevant bezüglich der Lösung irgendeines praktischen Problems. Aber es gibt keinen triftigen Grund, die Existenz solcher Wahrscheinlichkeiten zu leugnen. Wir wollen uns daher darauf einigen, dass *das bedingte WSK-Mass $P_A[\cdot]$ immer existiert, im allgemeinen jedoch unbekannt ist, falls $P[A] = 0$* . Um eine daraus resultierende Konsequenz zu erkennen, sei darauf hingewiesen, dass (8.2.2) auch geschrieben werden kann als

$$P[A \cap B] = P[A] P_A[B]. \quad (8.2.6)$$

Aus $P[A] = 0$ folgt $P[A \cap B] = 0$, und wir sehen, dass (8.2.6) auch eine gültige Gleichung darstellt, wenn $P[A] = 0$. Dies wäre aber keineswegs der Fall, wenn wir auf der Nichtexistenz von $P_A[B]_{|P[A]=0}$ bestehen würden.

Der zweite Punkt, der Verwirrung stiftet, betrifft die Notation. Es verwendet praktisch niemand die vorgängig eingeführte Schreibweise $P_A[\cdot]$ für das bedingte WSK-Mass unter der Bedingung, dass A eintritt. Fast überall wird dieses WSK-Mass mit $P(\cdot|A)$ bezeichnet. In dieser Notation wird (8.2.2) zu

$$P(B|A) = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \quad (8.2.7)$$

für alle B in \mathcal{A} , falls $P[A] \neq 0$. Leider wird aber der Leser generell nicht darauf aufmerksam gemacht, dass das "P" in $P[\cdot]$ nicht dasselbe ist wie dasjenige in $P(\cdot|A)$. Es wäre bei weitem weniger verwirrend, wenn sich jedermann auf die Schreibweise $P_A[\cdot]$ für bedingte WSK-Masse einigen würde, so wie wir es in dieser Einführung gemacht haben. Da wohl kaum Hoffnung besteht, dies durchzusetzen, werden wir von jetzt an die übliche Notation $P(\cdot|A)$ übernehmen. Als kleine Hilfe für den Leser werden wir aber immer *runde* Klammern für bedingte WSK-Masse verwenden, während wir konventionelle WSK-Masse $P[\cdot]$ weiterhin mit *eckigen* Klammern schreiben werden.

In "Standard"-Notation wird (8.2.6) zu

$$P[A \cap B] = P[A] P(B|A). \quad (8.2.8)$$

Da aber auch

$$P[A \cap B \cap C] = P[A \cap B] P(C|A \cap B)$$

zutrifft, können wir sofort darauf schliessen, dass

$$P[A \cap B \cap C] = P[A] P(B|A) P(C|A \cap B). \quad (8.2.9)$$

Es sollte einleuchtend sein, dass auf der rechten Seite von (8.2.8) zwei verschiedene bedingte WSK-Masse auftreten [nämlich $P(\cdot|A)$ und $P(\cdot|A \cap B)$], und dass (8.2.9) auch gültig ist, wenn $P[A] = 0$ oder/und $P[A \cap B] = 0$. Die naheliegende Verallgemeinerung

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P[A_1] P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (8.2.10)$$

heisst *Multiplikationsregel* [multiplication rule] für bedingte Wahrscheinlichkeiten und gilt ungeachtet der Fälle, in welchen eines oder mehrere bedingte Ereignisse die WSK null hat.

8.3 "Totale Wahrscheinlichkeit" und Bayes'sche Formel

Man sagt, dass A_1, A_2, \dots, A_k eine *vollständige Klasse von paarweise unvereinbaren Ereignissen* - *vKpuE* [complete class of pairwise mutually exclusive events - CCPMEE] bilden, falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ sowie $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \Omega$. Anders formuliert bilden A_1, A_2, \dots, A_k eine *vKpuE*, wenn genau eines dieser Ereignisse bei jeder Durchführung des Zufallsexperimentes stattfindet. Wie wir später sehen werden, spielen solche Klassen eine fundamentale Rolle in der Entscheidungstheorie.

Falls A_1, A_2, \dots, A_k eine *vKpuE* bilden, dann folgt für irgendein Ereignis B

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \dots (B \cap A_k). \end{aligned}$$

Die Ereignisse $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_k$ sind ebenfalls paarweise unvereinbar, so dass wir unter Anwendung des dritten Axioms von Kolmogorov

$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + \dots + P[B \cap A_k]$$

erhalten. Nach Gebrauch von (8.2.8) erhalten wir ein Resultat, welches auf einen fragwürdigen Namen getauft ist:

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit [Theorem of Total Probability]:

Falls A_1, A_2, \dots, A_k eine *vKpuE* bilden, und B irgendein Ereignis ist, dann gilt

$$P[B] = P[A_1] P(B|A_1) + P[A_2] P(B|A_2) + \dots + P[A_k] P(B|A_k). \quad (8.3.1)$$

Selbstverständlich gibt es nicht so etwas wie eine "totale WSK", aber diese irreführende Terminologie ist so tief in der Literatur verankert, dass man sich wohl damit abzufinden hat.

In Gleichung (8.2.6) lässt sich erkennen, dass wir $P[A \cap B] = P[B \cap A]$ auf zwei Arten schreiben können, nämlich

$$P[A \cap B] = P[A] P(B | A) = P[B] P(A | B).$$

Falls $P[B] \neq 0$, dürfen wir noch durch $P[B]$ dividieren, und wir erhalten

$$P(A | B) = \frac{P[A] P(B | A)}{P[B]}, \quad (8.3.2)$$

was manchmal als Bayes'sche Formel bezeichnet wird. Puristen jedoch halten den Namen "Bayes'sche Formel" frei für die Beschreibung der speziellen Form von (8.3.2), wenn A eines der Ereignisse einer vKpuE darstellt und (8.3.1) für die Umschreibung des Nenners verwendet wird.

Bayes'sche Formel [Bayes' Rule]:

Falls A_1, A_2, \dots, A_k eine vKpuE bilden, dann gilt für alle i ($1 \leq i \leq k$) und alle Ereignisse B (wobei $P[B] \neq 0$):

$$P(A_i | B) = \frac{P[A_i] P(B | A_i)}{P[A_1] P(B | A_1) + \dots + P[A_k] P(B | A_k)}. \quad (8.3.3)$$

8.4 Bedingte Dichten und Erwartungswerte

Mit dem Wissen, dass ein bedingtes WSK-Mass mathematisch identisch ist mit dem konventionellen WSK-Mass, sollte der Leser ohne weiteres imstande sein, die früher vorgenommene Behandlung der Zufallsgrößen auf den bedingten Fall zu erweitern.

Die bedingte Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X , unter der Bedingung, dass A eintritt [the conditional probability distribution function for the random variable X given that A occurs] ist die Funktion

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (8.4.1)$$

so dass

$$F_{X|A}(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\} | A). \quad (8.4.2)$$

Aus Kapitel 2.3 folgt unmittelbar, dass (i) eine bedingte Verteilungsfunktion eine nicht abnehmende Funktion ist, und (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X|A}(x) = 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X|A}(x) = 1$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße X , unter der Bedingung, dass A eintritt [The conditional probability density function for the random variable X given that A occurs] ist die Ableitung der dazugehörigen bedingten Verteilungsfunktion und wird mit $p_{X|A}(\cdot)$ bezeichnet. [Wie bei der konventionellen WSK-Dichte werden wir auch hier bei der Ableitung Dirac-Stöße zulassen, um $p_{X|A}(\cdot)$ zu erhalten.]

Es folgt wiederum sofort aus Kapitel 2.3, dass

- (i) eine bedingte WSK-Dichte auf der ganzen reellen x -Achse entweder nur nichtnegative reelle Werte annimmt oder positive Dirac-Stösse enthält, und dass

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X|A}(x) dx = 1. \quad (8.4.3)$$

Es sei $f(\cdot)$ eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist der *bedingte Erwartungswert von $f(X)$ unter der Bedingung, dass A eintritt* [conditional expectation of $f(X)$ given that A occurs] die reelle Zahl

$$E[f(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_{X|A}(x) dx \quad (8.4.4)$$

[vorausgesetzt, dass dieses Integral existiert]. *Das bedingte n -te Moment von X , unter der Bedingung, dass A eintritt* [the conditional n -th moment of X given that A occurs] ist die Bezeichnung für die reelle Zahl

$$E[X^n|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_{X|A}(x) dx. \quad (8.4.5)$$

Die bedingte Varianz von X , unter der Bedingung, dass A eintritt, wird definiert als die reelle Zahl

$$\text{Var}[X|A] = E[X^2|A] - (E[X|A])^2. \quad (8.4.6)$$

Wir nehmen nun an, dass A_1, A_2, \dots, A_k eine vKpuE bilden. Sei weiter das Ereignis B aus dem Satz der Totalen WSK definiert als $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$, dann erhalten wir unter Verwendung von (8.4.2) und (2.3.1)

$$F_X(x) = P[A_1] F_{X|A_1}(x) + P[A_2] F_{X|A_2}(x) + \dots + P[A_k] F_{X|A_k}(x). \quad (8.4.7)$$

Abgeleitet ergibt dies

$$p_X(x) = P[A_1] p_{X|A_1}(x) + P[A_2] p_{X|A_2}(x) + \dots + P[A_k] p_{X|A_k}(x), \quad (8.4.8)$$

was eine sehr nützliche Formel darstellt im Zusammenhang mit einer vKpuE. Wird davon auch in der Definition des Erwartungswertes (2.3.3) Gebrauch gemacht, resultiert unter Berücksichtigung von (8.4.4) noch ein äusserst hilfreiches Werkzeug.

Satz des totalen Erwartungswertes [Theorem of Total Expectation]:

Falls A_1, A_2, \dots, A_k eine vKpuE bilden, dann ist

$$E[f(X)] = P[A_1] E[f(X)|A_1] + P[A_2] E[f(X)|A_2] + \dots + P[A_k] E[f(X)|A_k]. \quad (8.4.9)$$

Die Verallgemeinerung der Ideen dieses Kapitels auf Zufallsvektoren (ausgehend von skalaren Zufallsgrößen) ist so selbsterklärend, dass wir darauf verzichten, den Leser mit solchen Details zu langweilen.

8.5 Werte von Zufallsgrößen als Bedingungen

Vor allem in Entscheidungs- und Schätzproblemen beobachten wir des öfters den Wert irgendeiner Zufallsgröße Y , zum Beispiel $Y = y$; und wir brauchen die Kenntnis der "WSK-Gesetze", welche die Voraussetzung dafür geben, dass wir diese Beobachtung $Y = y$ gemacht haben. Anders ausgedrückt möchten wir das bedingte WSK-Mass kennen, unter der Bedingung, dass das Ereignis $Y = y$ eintritt. Falls Y eine diskrete Zufallsgröße ist, entstehen dadurch keine Probleme, da das Ereignis $\{\omega: Y(\omega) = y\}$ eine WSK größer als null aufweist. Oft ist aber Y eine kontinuierliche Zufallsgröße, was zur Folge hat, dass das Ereignis $Y = y$ mit der WSK null eintritt. In diesem Fall können wir (8.2.2) nicht gebrauchen, um das bedingte WSK-Mass zu berechnen, weil das bedingende Ereignis $B = \{\omega: Y(\omega) = y\}$ die WSK null aufweist. Es stellt sich nun die Frage, wie wir dennoch ein entsprechendes bedingtes WSK-Mass finden können. Wie wir gleich sehen werden, erweist sich die Antwort darauf als ziemlich einfach, wenn wir voraussetzen dürfen, dass die bedingte WSK-Dichte $p_Y(\cdot)$ im Punkt $Y = y$ stetig und ungleich null ist.

In der Realität ist es unmöglich, zwischen zwei genügend nahe beieinander liegenden reellen Punkten noch unterscheiden zu können. Vom physikalischen Standpunkt her gibt es folglich keinen Unterschied zwischen dem Ereignis, dass $Y = y$, und demjenigen, dass $y - \varepsilon < Y \leq y$ für genügend kleine ε . Falls $p_Y(\cdot)$ stetig und ungleich null ist in y , dann ist für alle positiven ε

$$P[y - \varepsilon < Y \leq y] = \int_{y-\varepsilon}^y p_Y(\beta) d\beta \quad (8.5.1)$$

ungleich null, sowie – für genügend kleine ε – gut approximiert durch $p_Y(y)\varepsilon$. Es erscheint daher physikalisch sinnvoll und mathematisch konsistent, das bedingte WSK-Mass $P(\cdot | Y = y)$ für jedes Ereignis B wie folgt zu definieren:

$$P(B | Y = y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(B | y - \varepsilon < Y \leq y). \quad (8.5.2)$$

Mit der Annahme $P[B] \neq 0$ kann (8.5.2) unter Zuhilfenahme der einfachen Bayes'schen Formel (8.3.2) umgeschrieben werden:

$$P(B | Y = y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P[B] P(y - \varepsilon < Y \leq y | B)}{P[y - \varepsilon < Y \leq y]}. \quad (8.5.3)$$

Genau wie $P[y - \varepsilon < Y \leq y]$ durch $p_Y(y)\varepsilon$ (ε genügend klein) gut approximiert ist, so wird auch $P(y - \varepsilon < Y \leq y | B)$ gut angenähert durch $p_{Y|B}(y)\varepsilon$. (8.5.3) ist daher identisch mit dem Ausdruck

$$P(B | Y = y) = \frac{P[B] p_{Y|B}(y)}{p_Y(y)},$$

den wir nun auch für unsere Definition von $P(B | Y = y)$ übernehmen.

Y sei eine Zufallsgrösse, wobei $p_Y(\cdot)$ stetig und ungleich null ist an der Stelle $Y = y$. Unter dieser Annahme definieren wir das *bedingte WSK-Mass unter der Bedingung, dass $Y = y$* [conditional probability measure given that $Y = y$] als die Funktion $P(\cdot | Y = y): \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$P(B | Y = y) = \frac{P[B] p_{Y|B}(y)}{p_Y(y)} \quad (8.5.4)$$

für alle Ereignisse B mit $P[B] \neq 0$. Falls $P[B] = 0$, werden wir generell $P(B | Y = y)$ als unbekannt annehmen [es braucht nicht null zu sein, denn wenn B zum Beispiel selbst das Ereignis $Y = y$ ist, würde daraus $P(B | Y = y) = 1$ resultieren]. Ähnlich haben wir nur Kenntnis von der Existenz, nicht jedoch um die Grösse von $P(\cdot | Y = y)$, falls $p_Y(y) = 0$. Im Vergleich mit (8.3.2) fällt auf, dass (8.5.4) als eine Art "Mischform der Bayes'schen Formel" aufgefasst werden kann. "Mischform" ist in dem Sinne gemeint, dass in (8.5.4) sowohl Wahrscheinlichkeiten diskreter Ereignisse als auch WSK-Dichten auftreten.

Nach Multiplikation mit $p_Y(y)$ und anschliessender Integration erhalten wir aus (8.5.4) ein nützliches Resultat.

Integrale Form des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit [Integral Form of the Theorem of Total Probability]

Für jedes Ereignis B und jede Zufallsgrösse Y mit einer stetigen WSK-Dichte gilt

$$P[B] = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y) P(B | Y = y) dy. \quad (8.5.5)$$

Aus der Definition (8.5.4) ist ersichtlich, dass $P(\cdot | Y = y)$ zweifellos ein korrektes WSK-Mass darstellt, wenn $p_Y(y) \neq 0$; folglich genügt $P(\cdot | Y = y)$ auch den drei Axiomen von Kolmogorov. Wir wollen daher $P(\cdot | Y = y)$ auf gleiche Art und Weise für die Bestimmung von bedingten Verteilungsfunktionen und WSK-Dichten benützen. Die *bedingte Verteilungsfunktion der Zufallsgrösse X , unter der Bedingung, dass $Y = y$* , [conditional probability distribution function for the random variable X given that $Y = y$] ist die Bezeichnung für die Funktion $F_{X|Y=y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$F_{X|Y=y}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(\{\omega : X(\omega) \leq x\} | y - \varepsilon < Y \leq y). \quad (8.5.6)$$

Die *bedingte WSK-Dichte der Zufallsgrösse X unter der Bedingung, dass Y = y*, [conditional probability density function for the random variable X given that Y = y] enthält man durch Differenzieren von (8.5.6):

$$\begin{aligned}
 p_{X|Y=y}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X|Y=y}(x) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F_{X|Y=y}(x) - F_{X|Y=y}(x - \delta)}{\delta} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{P(X \leq x | Y = y) - P(X \leq x - \delta | Y = y)}{\delta} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{P(x - \delta < X \leq x | Y = y)}{\delta} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(x - \delta < X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y)}{\delta},
 \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile von (8.5.2) Gebrauch gemacht worden ist. Aus (8.2.2) folgt nun, dass

$$p_{X|Y=y}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{\omega : x - \delta < X(\omega) \leq x \text{ und } y - \varepsilon < Y(\omega) \leq y\}}{\delta P\{\omega : y - \varepsilon < Y(\omega) \leq y\}}.$$

Wenn $p_{XY}(\cdot, \cdot)$ stetig ist im Punkt (x, y) , so erhalten wir

$$p_{X|Y=y}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{p_{XY}(x, y) \delta \varepsilon}{\delta p_Y(y) \varepsilon} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad (8.5.7)$$

was einen unerwartet einfachen Ausdruck darstellt. Der Leser muss an dieser Stelle leider darauf aufmerksam gemacht werden, dass nicht $p_{X|Y=y}(\cdot)$ der Notation für die bedingte WSK-Dichte entspricht, sondern die viel verwirrendere Bezeichnung $p_{X|Y}(\cdot|y)$.

Wir fassen zusammen:

Falls die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte [joint probability density function] $p_{XY}(\cdot, \cdot)$ der Zufallsgrössen X und Y stetig ist im Punkt (x, y) für alle $x \in \mathbb{R}$, und falls die WSK-Dichte $p_Y(\cdot)$ stetig und nicht null ist im Punkt y , dann ist die bedingte WSK-Dichte der Zufallsgrösse X unter der Bedingung, dass $Y = y$, gegeben durch

$$p_{X|Y}(\cdot|y) = \frac{p_{XY}(\cdot, y)}{p_Y(y)}. \quad (8.5.8)$$

Wenn nicht anders spezifiziert, werden wir von jetzt an stillschweigend annehmen, dass die bedingte WSK-Dichte $p_{X|Y}(\cdot|y)$ nach (8.5.8) berechnet werden kann. Formel (8.5.8) lässt sich auch schreiben als

$$p_{XY}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) p_Y(y). \quad (8.5.9)$$

Wenn also $f(.,.)$ eine reellwertige Funktion zweier reellen Variablen ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} E[f(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{X|Y}(x|y) p_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{X|Y}(x|y) dx p_Y(y) dy . \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Nun ist aber

$$E[f(X, Y)|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{X|Y}(x|y) dx \quad (8.5.11)$$

immer eine Funktion von y , unserer Definition des totalen Erwartungswertes entsprechend. Wird (8.5.11) in (8.5.10) verwendet, erhalten wir das folgende hilfreiche Resultat.

Integrale Form des Satzes vom totalen Erwartungswert [Integral Form of the Theorem of Total Expectation]:

$$E[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[f(X, Y)|Y = y] p_Y(y) dy. \quad (8.5.12)$$

Wir wollen dieses Kapitel mit der Bemerkung schliessen, dass sich sämtliche obigen Herleitungen einfach von Zufallsgrössen auf Zufallsvektoren verallgemeinern lassen. Wir wollen daher die langweiligen Einzelheiten dieser Erweiterung dem engagierten Leser überlassen.

Kapitel 9

Entscheidungstheorie

9.1 Einführung

Beim Problem der Entscheidungstheorie geht es im allgemeinen darum, sich aufgrund einiger Beobachtungen festzulegen, welches Ereignis aus einer Auswahl von interessierenden Ereignissen tatsächlich stattgefunden hat. Wird zum Beispiel ein empfangenes Signal beobachtet, so möchte man sich dafür entscheiden, welches von k möglichen Signalen eigentlich gesendet wurde. Das Blockdiagramm in Bild 9.1.1 veranschaulicht das allgemeine Entscheidungsproblem. Der Beobachter sieht den Wert \mathbf{y} des Zufallsvektors \mathbf{Y} und fällt darauf seine Entscheidung $d(\mathbf{y})$, welches der Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_k stattgefunden hat. Wir wollen an dieser Stelle festhalten, dass A_1, A_2, \dots, A_k immer eine vollständige Klasse von paarweise unvereinbaren Ereignissen (vKpuE) bilden und dass $d(\mathbf{y}) = i$ die Bezeichnung ist für die Entscheidung des Beobachters, dass A_i eingetroffen ist. Diese Entscheidung erweist sich als richtig, wenn der aktuelle Ausgang ω des Zufallsexperiments in A_i ist, d.h. wenn A_i auch tatsächlich eingetreten ist; im anderen Fall stellt sich diese Entscheidung als falsch heraus.

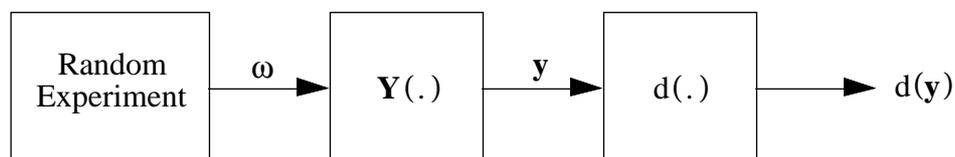


Fig. 9.1.1: Eine Veranschaulichung des allgemeinen Entscheidungsproblems. Die Entscheidung $d(\cdot)$ nimmt Werte an in der Menge $\{1, 2, \dots, k\}$, wobei A_1, A_2, \dots, A_k die interessierenden Ereignisse darstellen.

In jedem Entscheidungsproblem ist erstens genau festzulegen, was zum vornherein bekannt ist, und zweitens, was erreicht werden soll (das Gütekriterium). Die bedingten WSK-Dichten $p_{\mathbf{Y}|A_i}(\cdot)$ für $i = 1, 2, \dots, k$ sind in fast allen Entscheidungsproblemen bekannt, und wir werden dies darum auch immer voraussetzen. Was aber die *a priori* Wahrscheinlichkeiten $P[A_1], P[A_2], \dots, P[A_k]$ der interessierenden Ereignisse betrifft, kann nicht immer von deren Kenntnis ausgegangen werden. Es gibt viele mögliche Gütekriterien, die zur Anwendung kommen. Wir wollen in diesem Kapitel die wichtigsten aus der Vielfalt von

Entscheidungsproblemen betrachten, welche sich alle durch eine unterschiedliche Spezifikation der Vorkenntnisse und des Gütekriteriums auszeichnen.

9.2 Die MAP-Entscheidungsregel

Das naheliegendste und sehr oft verwendete Gütekriterium für eine Entscheidungsregel $d(\cdot)$ ist die WSK einer richtigen Entscheidung. Sei C das Ereignis, dass die Entscheidung richtig ist, d.h. dass $A_{d(\mathbf{Y})}$ tatsächlich eintritt. Hiermit können wir unser erstes Entscheidungsproblem wie folgt definieren:

Entscheidungsproblem #1

- (1) Die bedingte WSK-Dichte $p_{Y|A_i}(\cdot)$ wie auch die *a priori* Wahrscheinlichkeit $P[A_i]$ ist bekannt für $i = 1, 2, \dots, k$.
- (2) Wir sollen die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung $P[C]$ maximieren.

Es ist nicht schwierig, die optimale Entscheidungsregel für dieses Problem zu bestimmen. Die Integralform (8.5.5) des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit bildet unseren Ansatz:

$$P[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(C | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (9.2.1)$$

Unter der Bedingung, dass $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, tritt aber C nur dann ein, falls $A_{d(\mathbf{y})}$ eintritt, d.h.

$$P(C | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = P(A_{d(\mathbf{y})} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}). \quad (9.2.2)$$

Durch Einsetzen von (9.2.2) in (9.2.1) ergibt sich

$$P[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A_{d(\mathbf{y})} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (9.2.3)$$

Da $p_Y(\mathbf{y})$ nicht negativ ist und weil wir $d(\mathbf{y})$ unabhängig für alle \mathbf{y} wählen können, folgt aus (9.2.3), dass $P[C]$ für jedes \mathbf{y} durch diejenige Wahl $d(\mathbf{y})$ maximiert wird, welches $P(A_{d(\mathbf{y})} | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$ maximiert.

Die Entscheidungsregel, die $P[C]$ maximiert, lautet wie folgt: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $d(\mathbf{y})$ als den (oder einen von mehreren gleichwertigen) Index i , welcher $P(A_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$ maximiert. Diese Regel heisst MAP-Regel (wobei MAP das Akronym für *maximum a posteriori* ist), weil man sich $P(A_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$ als WSK des Ereignisses A_i vorstellen kann, nachdem die Beobachtung $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ gemacht worden ist.

Wie schon erwähnt, ist die MAP-Regel interessant, aber nicht sehr nützlich, da wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$ für $i = 1, 2, \dots, k$ nicht direkt kennen. Um diesen Mangel zu beheben, machen wir Gebrauch von der "Mischform der Bayes'schen Formel" (8.5.4)

$$P\left(A_{d(\mathbf{y})} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}\right) p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = P\left[A_{d(\mathbf{y})}\right] p_{\mathbf{Y}|A_{d(\mathbf{y})}}(\mathbf{y}). \quad (9.2.4)$$

Wenn wir (9.2.4) in (9.2.3) einsetzen, ergibt sich

$$P[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left[A_{d(\mathbf{y})}\right] p_{\mathbf{Y}|A_{d(\mathbf{y})}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (9.2.5)$$

Wir maximieren $P[C]$, d.h. das obenstehende Integral, durch Maximieren des Integranden $P\left[A_{d(\mathbf{y})}\right] p_{\mathbf{Y}|A_{d(\mathbf{y})}}(\mathbf{y})$ für jedes \mathbf{y} . Wir haben somit folgende Analogie gezeigt.

Die MAP-Regel, d.h. die Entscheidungsregel, welche $P[C]$ maximiert, lautet wie folgt: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $d(\mathbf{y})$ als den (oder einen von mehreren gleichwertigen) Index i , welcher $P\left[A_i\right] p_{\mathbf{Y}|A_i}(\mathbf{y})$ maximiert.

Wir haben nun die MAP-Regel auf eine nützliche Form gebracht, da sie sich lediglich auf Größen bezieht, die in Entscheidungsproblem #1 als bekannt vorausgesetzt worden sind.

Gleichung (9.2.5) stellt eine brauchbare Formel dar, um $P[C]$ für *jede* Entscheidungsregel $d(\cdot)$ zu berechnen, nicht nur für die optimale MAP-Regel. Manchmal ist es aber bequemer, diese Formel auf *Entscheidungsgebiete* $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_k$ umzuschreiben, die wie folgt definiert sind

$$\mathcal{Y}_i = \{\mathbf{y} : d(\mathbf{y}) = i\}. \quad (9.2.6)$$

Selbstverständlich ist die Spezifikation einer Entscheidungsfunktion analog zu jener dieser Entscheidungsgebiete. Da $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_i$ genau dann zutrifft, wenn $d(\mathbf{y}) = i$, können wir (9.2.5) auch schreiben als:

$$P[C] = \sum_{i=1}^k P\left[A_i\right] \int_{\mathcal{Y}_i} p_{\mathbf{Y}|A_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (9.2.7)$$

Diese Formel ist für jede Entscheidungsregel gültig und stellt oft den bequemsten Weg dar, um $P[C]$ zu bestimmen.

9.3 Die Maximum-Likelihood Entscheidungsregel

Wir betrachten nun eine Entscheidungsregel, die bei fehlender Kenntnis der *a priori* Wahrscheinlichkeiten von A_1, A_2, \dots, A_k benützt werden kann. Diesmal spezifizieren wir kein Entscheidungsproblem und fordern hiermit auch nicht, dass diese Entscheidungsregel optimal ist.

Die Maximum-Likelihood (ML) Regel lautet: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $d(\mathbf{y})$ als den (oder einen von mehreren gleichwertigen) Index i , welcher $p_{\mathbf{Y}|A_i}(\mathbf{y})$ maximiert.

Warum ist diese Entscheidungsregel interessant? Ein bevorzugtes Argument ist das folgende:

Die ML-Regel stimmt mit der MAP-Regel genau dann überein (und maximiert folglich auch $P[C]$), wenn alle *a priori* Wahrscheinlichkeiten $P[A_1], P[A_2], \dots, P[A_k]$ gleich gross sind (nämlich $1/k$).

Sehr überzeugend ist dieses Argument für die Rechtfertigung der ML-Regel nicht, da die tatsächlichen *a priori* Wahrscheinlichkeiten drastisch voneinander abweichen können. Ein besseres Argument für die ML-Regel kann durch die Tatsache geliefert werden, dass die Gleichheit von *a priori* Wahrscheinlichkeiten genau dort angenommen wird, wo es am schwierigsten ist, eine zuverlässige Entscheidung zu treffen. Eine für diesen "worst case" optimale Entscheidungsregel, d.h. die ML-Regel, sollte auch in allen anderen Fällen vernünftige Resultate erbringen. In den Übungen wird die "robuste Güte" der ML-Regel aufgezeigt, woraus verständlich wird, dass diese Entscheidungsregel zur beliebtesten in der Nachrichtentechnik avanciert ist.

9.4 Die Bayes'sche Entscheidungsregel

Oftmals in Entscheidungsproblemen wirken sich gewisse Fehler schlimmer aus als andere. Es ist zum Beispiel im allgemeinen kostspieliger, wenn ein Rauchmelder fälschlicherweise "kein Rauch" meldet als umgekehrt. Um mit solch ungleichen Kosten umgehen zu können, definieren wir s_{mn} als die Kosten, die entstehen, wenn A_m eingetroffen ist, man sich aber dafür entschieden hat, dass A_n eintreffen würde. [Es wird darauf hingewiesen, dass s_{mn} die Kosten einer richtigen Entscheidung darstellen; vielfach wird $s_{mn} = 0$ gewählt, aber diese Einschränkung ist nicht nötig.] Des weiteren definieren wir die Zufallsgrösse S als die Kosten einer Entscheidung, so dass $S(\omega) = s_{mn}$, falls das Ergebnis ω des Zufallsexperimentes in A_m ist (d.h. A_m eintritt), und falls $d(\mathbf{Y}(\omega)) = n$ (d.h. wir entschieden haben, dass A_n eintreten würde). Wir können hiermit ein interessantes Entscheidungsproblem formulieren.

Entscheidungsproblem #2 (Allgemeines Bayes'sches Entscheidungsproblem):

- (1) Die bedingte WSK-Dichte $p_{Y|A_i}(\cdot)$, sowie die *a priori* WSK $P[A_i]$ seien bekannt für $i = 1, 2, \dots, k$. Die Kosten s_{mn} für den Fall, wenn A_m eintritt, wir uns aber für A_n entschieden haben, seien für $m = 1, 2, \dots, k$ und $n = 1, 2, \dots, k$ bestimmt.
- (2) Wir wollen die zu erwartenden Kosten der Entscheidung $E[S]$ minimieren.

Um eine optimale Entscheidungsregel für dieses Problem zu finden, ist es vorteilhaft, ein Ereignis D_i einzuführen, welches besagt, dass wir uns für A_i entschieden haben, d.h. \mathbf{Y} in \mathcal{Y}_i ist. Die Ereignisse D_1, D_2, \dots, D_k bilden eine vKpuE, genauso wie die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_k . Es bilden folglich auch die k^2 Ereignisse $A_m \cap D_n$ für $m = 1, 2, \dots, k$ und $n = 1, 2, \dots, k$ eine vKpuE. Wir können somit den Satz des totalen Erwartungswertes (8.4.9) anwenden:

$$E[S] = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k P[A_m \cap D_n] E[S | A_m \cap D_n]. \quad (9.4.1)$$

Wenn aber $A_m \cap D_n$ eintritt, betragen die Kosten S genau s_{mn} , so dass

$$E[S | A_m \cap D_n] = s_{mn}. \quad (9.4.2)$$

Des weiteren gilt:

$$\begin{aligned} P[A_m \cap D_n] &= P[A_m] P(D_n | A_m) \\ &= P[A_m] P(\mathbf{Y} \in \mathcal{J}_n | A_m) \\ &= P[A_m] \int_{\mathcal{J}_n} p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Durch Einsetzen von (9.4.2) und (9.4.3) in (9.4.1) erhalten wir

$$E[S] = \sum_{m=1}^k P[A_m] \sum_{n=1}^k s_{mn} \int_{\mathcal{J}_n} p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (9.4.4)$$

was eine bequeme Form darstellt für die Berechnung von $E[S]$ für irgendeine Entscheidungsregel, weil ja sämtliche Größen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens bekannt sind. Für die optimale Entscheidungsregel fehlt jedoch noch eine nützliche Form.

Wir halten fest, dass $\mathbf{y} \in \mathcal{J}_n$, falls $d(\mathbf{y}) = n$. Somit ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k s_{mn} \int_{\mathcal{J}_n} p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \sum_{n=1}^k \int_{\mathcal{J}_n} s_{mn} p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{md(\mathbf{y})} p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

Wenn wir (9.4.5) in (9.4.4) einsetzen und die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen, ergibt sich nun

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=1}^k s_{md(\mathbf{y})} P[A_m] p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) \right] d\mathbf{y}. \quad (9.4.6)$$

Da dieses Integral minimiert werden kann, indem wir den Integranden für jedes \mathbf{y} minimieren, resultiert die optimale Entscheidungsregel wie folgt:

Die *Bayes'sche Entscheidungsregel*, d.h. die Regel, welche $E[S]$ minimiert, lautet: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $d(\mathbf{y})$ als den (oder einen von mehreren gleichwertigen) Index i , welches

$$\sum_{m=1}^k s_{mi} P[A_m] p_{\mathbf{Y}|A_m}(\mathbf{y}) \quad (9.4.7)$$

minimiert.

9.5 Maximum-Likelihood Entscheidungen und der Viterbi-Algorithmus

Wir haben bereits die Robustheit der ML-Entscheidungsregel und deren Beliebtheit in der Nachrichtentechnik angesprochen. In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren betrachten, welches ML-Entscheidungsregeln implementiert. Es trägt die Bezeichnung "Viterbi-Algorithmus" und hat die Nachrichtentechnik über die letzten zwei Jahrzehnte revolutioniert. Vorerst wollen wir aber eine bequeme Notation für die Beschreibung der ML-Regel aus Abschnitt 9.3 einführen. Dabei wird auf ein äusserst nützliches Prinzip hingewiesen, welches ML-Entscheidungen zugrunde liegt.

Aus Abschnitt 2.3 entnehmen wir, dass eine Zufallsgrösse X eine Abbildung des Ereignisraumes Ω auf die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist. Der mit $X(\Omega)$ bezeichnete Wertebereich [range] dieser Abbildung ist die Menge der reellen Zahlen x , für welche es ein bestimmtes ω in Ω gibt und für die gilt: $X(\omega) = x$. Mit anderen Worten ist $X(\Omega)$ die Menge aller möglichen Werte der Zufallsgrösse X . Eine *diskrete Zufallsgrösse* ist eine Zufallsgrösse, deren Menge aller möglichen Werte endlich oder höchstens abzählbar unendlich ist. Wir wollen eine aus k möglichen Werten bestehende Zufallsgrösse X , nämlich $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, eine *k-wertige Zufallsgrösse* [k-ary random variable] nennen.

Unser Interesse in k -wertigen Zufallsgrössen beruht darauf, dass sie eine natürliche Möglichkeit für die Spezifikation einer vollständigen Klasse von paarweise unvereinbaren Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_k (vKpuE) bietet. Definieren wir

$$A_i = \{\omega: X(\omega) = x_i\},$$

wobei $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, dann haben wir eine vKpuE bestimmt. [Überdies sollte es dem Leser klar sein, dass wir die WSK-Dichte von X als

$$p_X(\cdot) = P[A_1] \delta(\cdot - x_1) + \dots + P[A_k] \delta(\cdot - x_k)$$

schreiben können, aber wir werden von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen.]

Des weiteren legen wir fest, dass der Zufallsvektor \mathbf{X} ein k -wertiger Zufallsvektor ist, falls $\mathbf{X}(\Omega) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$. Die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_k , wobei $A_i = \{\omega: \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x}_i\}$, bilden wiederum eine vKpuE.

Es leuchtet nun ein, dass das Entscheidungsproblem, *welches* von einer vKpuE tatsächlich eingetreten ist, im wesentlichen identisch ist zu jenem, *welches* von k möglichen Werten aus irgendeinem k -wertigen Zufallsvektor (oder einer Zufallsgrösse) schliesslich eintritt. Es ist naheliegend, die Entscheidung für einen Wert aus einem k -wertigen Zufallsvektor \mathbf{X} mit \mathbf{X} , sowie $p_{Y|A_i}(\cdot)$ mit $p_{Y|\mathbf{X}}(\cdot | \mathbf{x}_i)$ zu bezeichnen. Mit dieser Übereinkunft lässt sich die ML-Regel aus Abschnitt 9.3 wie folgt neu formulieren:

Die *ML-Entscheidungsregel* lautet: Wähle für die Beobachtung \mathbf{y} diejenige Entscheidung \mathbf{X} für den k -wertigen Zufallsvektor \mathbf{X} als den (oder einen von mehreren gleichwertigen) Wert(en) \mathbf{x}_i in $\mathbf{X}(\Omega) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$, der $p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_i)$ maximiert.

Wir kommen nun zu einer Eigenschaft von ML-Entscheidungen, die so nützlich wie einfach ist.

Invertierbarkeitsprinzip [Invertibility Principle] für ML-Entscheidungen: Sei $\mathbf{X} = f(\mathbf{U})$, wobei $f: \mathbf{U}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}(\Omega) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$. Falls f eine invertierbare Funktion ist, d.h. $\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{X})$, dann ist \mathbf{X} nur dann die ML-Entscheidung für \mathbf{X} aus der Beobachtung \mathbf{Y} , wenn $\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{X})$ die ML-Entscheidung für \mathbf{U} aus derselben Beobachtung \mathbf{Y} ist.

Diese Eigenschaft rührt von der Tatsache her, dass $\{\omega: \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x}_i\} = \{\omega: \mathbf{U}(\omega) = f^{-1}(\mathbf{x}_i)\}$. Daraus folgt, dass \mathbf{x}_i nur dann $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ maximiert, falls $\mathbf{u}_i = f^{-1}(\mathbf{x}_i)$ die bedingte WSK-Dichte $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{U}}(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)$ maximiert.

Anstatt den Typ von ML-Entscheidungsproblemen, deren Lösung mittels Viterbi-Algorithmus gefunden werden kann, allgemein herzuleiten, beginnen wir mit einem einfachen (aber praktischen) Beispiel, woraus wir später das allgemeine Problem ableiten werden.

Betrachten wir das digitale Übertragungssystem in Figur 9.5.1. Die Datensymbole seien hier binäre Zufallsgrößen, Werte in $\{-1, +1\}$ annehmend. Die Datensymbole werden durch einen Kanal übertragen, bestehend aus einem FIR-Filter erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Der Filterausgang wird mit einem additiven weissen Gauss'schen Rauschen (AWGN - additive white gaussian noise) $Z[\cdot]$ mit Varianz σ^2 überlagert.

[Man beachte, dass $|H(e^{j\Omega})| = 2|\sin(\Omega/2)|$, und dieses FIR-Filter somit im Frequenzband $-\pi < \Omega < \pi$ Hochpasseigenschaften aufweist, was typisch ist für Übertragungskanäle.]

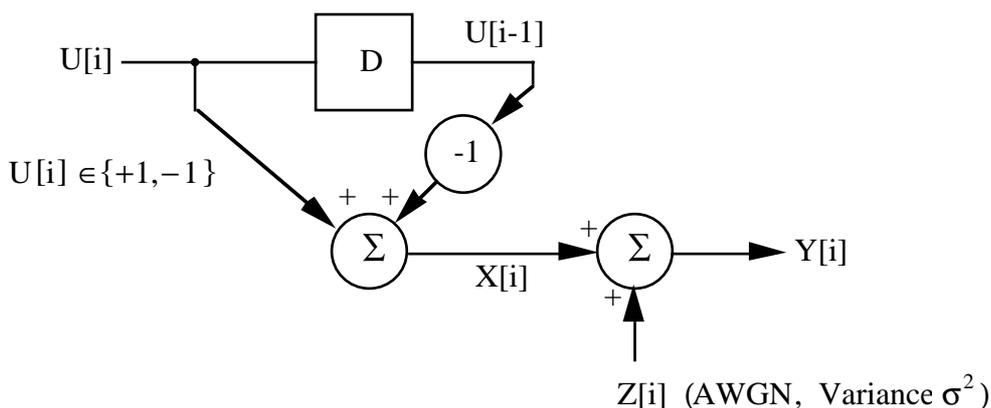


Fig. 9.5.1: Typisches digitales Übertragungssystem.

Wir wollen nun eine ML-Entscheidung für den Zufallsvektor

$$\mathbf{U} = (U[0], U[1], U[2])$$

treffen, unter der Annahme, dass

$$U[-1] = +1 \quad (9.5.1)$$

und

$$U[3] = +1 \quad (9.5.2)$$

(was vor der Übertragung zwischen Sender und Empfänger zum Beispiel hätte abgemacht werden können). Die Beobachtung setze sich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{Y} = (Y[0], Y[1], Y[2], Y[3]).$$

Wir beginnen mit der Lösung des Problems, indem wir – auf Fig. 9.5.1 bezogen – mit der Definition

$$\mathbf{X} = (X[0], X[1], X[2], X[3])$$

und

$$\mathbf{Z} = (Z[0], Z[1], Z[2], Z[3])$$

die beiden Zufallsvektoren addieren:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}. \quad (9.5.3)$$

Mit der vorgängig eingeführten Bezeichnung von *additivem Rauschen* ist die Unabhängigkeit des Zufallsvektors \mathbf{Z} von \mathbf{X} , zu welchem er addiert wird, gemeint. (9.5.3) lässt sich somit schreiben als

$$p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (9.5.4)$$

(was hiermit auch als Definition von *additivem Rauschen* aufgefasst werden kann). Da aber \mathbf{Z} weisses Gauss'sches Rauschen mit Varianz σ^2 ist, sind dessen Komponenten unabhängige, mittelwertfreie Gauss'sche Zufallsgrößen mit Varianz σ^2 , so dass gilt:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) &= \prod_{i=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y[i]-x[i])^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma^4} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^3 (y[i]-x[i])^2}. \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

Dies führt uns zu unserer ersten Schlussfolgerung:

Die ML-Entscheidung \mathbf{X} für \mathbf{X} bezüglich der Beobachtung $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ ist der Vektor \mathbf{x} in $\mathbf{X}(\Omega)$, welcher die quadratische Euklidische Distanz zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} , nämlich $\sum_{i=0}^3 (y[i] - x[i])^2$, minimiert.

Wir rufen uns nun in Erinnerung, dass eigentlich \mathbf{U} und nicht \mathbf{X} die Grösse darstellt, für welche wir eine ML-Entscheidung treffen wollen. Es ist ziemlich augenfällig (und wir werden dies später auch explizit zeigen), dass \mathbf{X} eine invertierbare Funktion von \mathbf{U} ist. Dem Invertierbarkeitsprinzip für ML-Entscheidungen entsprechend ist eine Entscheidung bezüglich \mathbf{X} gleichbedeutend mit jener bezüglich \mathbf{U} . Wir werden jedoch immer noch mit zwei beachtenswerten Problemen konfrontiert, nämlich

- (i) wie $\mathbf{X}(\Omega)$, die Menge aller möglichen Werte von \mathbf{X} , auf eine passende Art beschrieben werden kann; und
- (ii) wie auf einfache Weise der Vektor \mathbf{x} in $\mathbf{X}(\Omega)$, der die quadratische Euklidische Distanz zu \mathbf{y} minimiert, gefunden werden kann.

Dem Problem, eine geeignete Beschreibung für $\mathbf{X}(\Omega)$ zu finden, wollen wir uns zuerst widmen. Wir zeichnen hierfür den für die Erzeugung von \mathbf{X} relevanten Teil des Systems von Figur 9.5.1 nochmals auf.

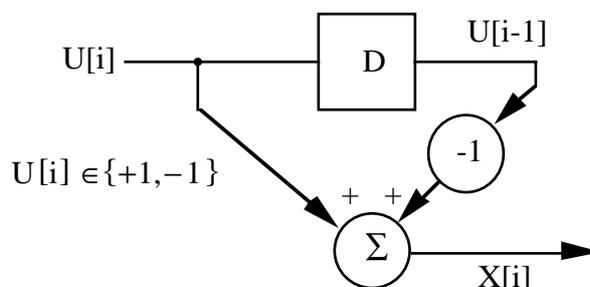


Fig. 9.5.2: Das LDS, das \mathbf{X} generiert.

Das Signal $X[.]$ ist lediglich der Ausgang eines FIR Filters erster Ordnung, an dessen Eingang das Datensignal $U[.]$ liegt. Überdies verkörpert

$$\sigma[i] = U[i - 1] \quad (9.5.6)$$

gerade den *Zustand* dieses LDS zum Zeitpunkt i . (In diesem speziellen Fall ist der Zustand nur darum ein Skalar, weil das FIR-Filter nur *einen* Speicher aufweist.) Da $U[i]$ für alle i nur Werte in $\{-1, +1\}$ annimmt, folgt aus (9.5.6), dass auch nur zwei Zustände in Frage kommen. (Es wären aber 2^n Zustände bei einem FIR Filter n -ter Ordnung). So führt die Einschränkung des Eingangs auf zwei Werte in $\{-1, +1\}$ das LDS von Fig. 9.5.2 in eine *endliche Zustandsmaschine* [finite-state machine, FSM] über, dessen Zustandsübergangsdiagramm in Figur 9.5.3 wiedergegeben ist. Darin ist jeder Übergang mit u/x gekennzeichnet, wobei u den FSM-Eingang darstellt, welcher den entsprechenden Zustandsübergang verursacht, und wobei x den dazugehörigen FSM-Ausgang beschreibt.

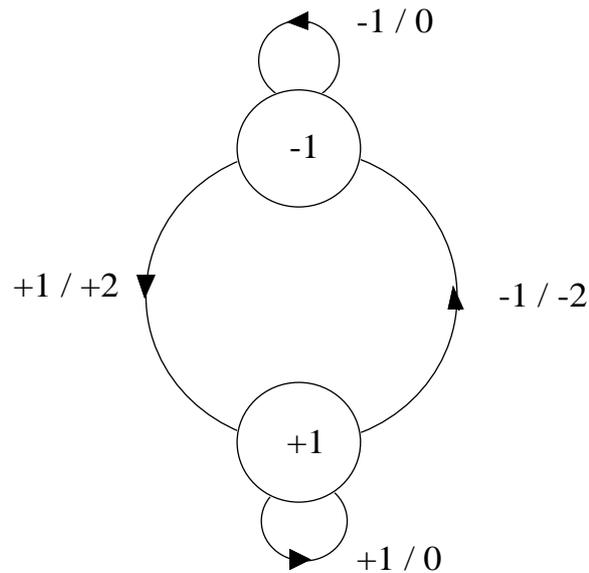


Fig. 9.5.3: Zustandsübergangsdiagramm der FSM von Figur 9.5.2.

Als nächstes rufen wir uns die Annahme (9.5.1) in Erinnerung, die gemäss (9.5.6) analog ist zu

$$\sigma[0] = +1. \quad (9.5.7)$$

Es ist nun nicht mehr schwierig, ausgehend vom Zustandsübergangsdiagramm ein weiteres Diagramm zu zeichnen, in welchem die zeitliche Entwicklung des Zustandes, sowie des entsprechenden Systemausgangs über das interessierende Intervall ersichtlich wird. Eine solche Realisation ist in Figur 9.5.4 abgebildet. Man beachte, dass unsere Annahme (9.5.2) gemäss (9.5.6) der Gleichung

$$\sigma[4] = +1 \quad (9.5.8)$$

entspricht.

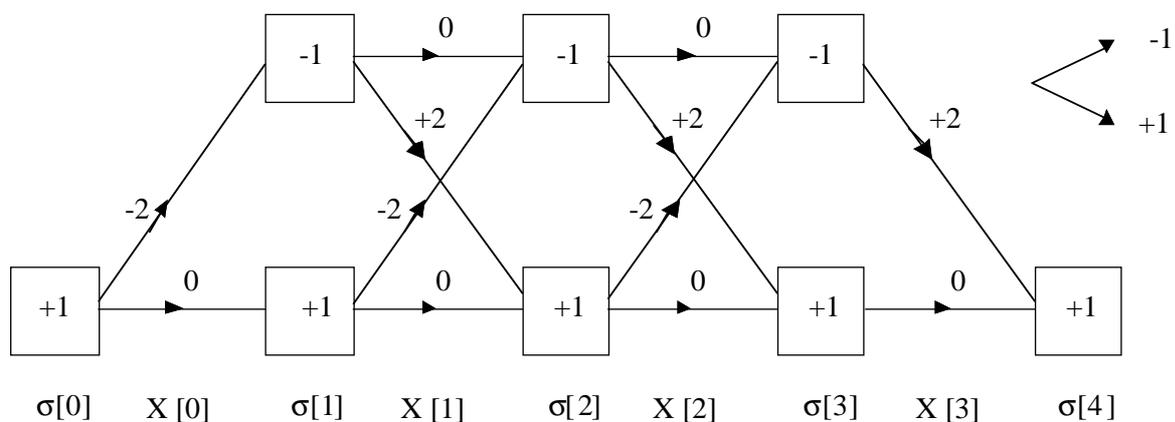


Fig. 9.5.4: Der Trellis, der $\mathbf{X}(\Omega)$ für die FSM von Fig.9.5.2 spezifiziert, mit den Randbedingungen (9.5.1) und (9.5.2).

Somit ist sowohl der Anfangs- wie der Endzustand eindeutig festgelegt. Dieses Diagramm trägt den Namen Trellis-Diagramm, weil es gewisse Ähnlichkeiten zu einem Spalier (engl. Trellis) aufweist, das oft in Rosengärten anzutreffen ist. Die Menge $\mathbf{X}(\Omega)$ aller möglichen Vektoren \mathbf{X} ist nur die Menge der 8 Vektoren, die die Kennzeichnung der 8 Trellis-Pfade vom Anfangs- zum Endzustand bilden.

Der obere der beiden Zweige, die jeden Zustand verlassen, resultiert aus einem Eingangswert -1 , während der untere Zweig jeweils das Ergebnis von $+1$ am Eingang darstellt. Es ist nun keine Hexerei mehr, den Vektor $\mathbf{u} = (u[0], u[1], u[2])$ zu finden, wenn $\mathbf{x} = (x[0], x[1], x[2], x[3])$ gegeben ist. Dem Vektor $\mathbf{x} = (-2, +2, -2, +2)$ liegt zum Beispiel $\mathbf{u} = (-1, +1, -1)$ zugrunde. Dies zeigt uns, dass \mathbf{X} tatsächlich eine invertierbare Funktion von \mathbf{U} ist, was die Anwendung des Invertierbarkeitsprinzips für ML-Entscheidungen rechtfertigt. Wir sehen darüber hinaus, dass es eine ziemlich triviale Angelegenheit ist, bei gegebener ML-Entscheidung \mathbf{X} die dazugehörige ML-Entscheidung \mathbf{U} zu finden.

Es bleibt uns also nur noch, das andere Problem zu lösen, nämlich dasjenige, wie wir, für ein bestimmtes \mathbf{y} , auf einfache Weise jenen Pfad \mathbf{x} durch den Trellis von Figur 9.5.2 finden können, der die quadratische Euklidische Distanz zu \mathbf{y} minimiert. Hierzu werden wir uns strikte an die Tatsache halten, dass diese quadratische Euklidische Distanz

$$d_E^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^3 (y[i] - x[i])^2 \quad (9.5.9)$$

additiv ist über die Zweige entlang des Pfades \mathbf{x} durch den Trellis hindurch. Wir werden das allgemeine Verfahren anhand eines Beispiels veranschaulichen und verwenden

$$\mathbf{y} = \{-.5, -1.0, +.5, +1.5\} \quad (9.5.10)$$

als beim Empfänger beobachtete Sequenz.

Jeder Zweig der Tiefe i wird nun mit seiner *Zweig-Metrik* $(y[i] - x[i])^2$ gekennzeichnet, wobei $x[i]$ das Symbol jenes Zweiges im Original-Trellis von Fig. 9.5.4 darstellt. Wir erhalten somit der in Fig. 9.5.5 gezeigte *Trellis der Zweig-Metriken*.

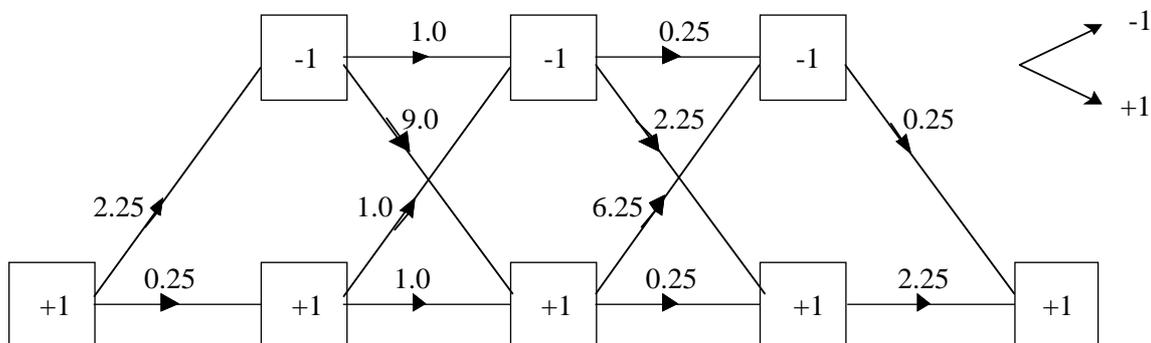


Fig. 9.5.5: Der Zweig-Metrik-Trellis für den Trellis von Fig. 9.5.4, falls $\mathbf{y} = \{-.5, -1.0, +.5, +1.5\}$.

Es geht jetzt darum, jenen Pfad durch den Trellis von Fig. 9.5.5 hindurch zu finden, welcher die *kleinste Gesamtmeterik* aufweist, d.h. die kleinste Summe der Zweig-Metriken. Diese Aufgabe kann mit dem Viterbi-Algorithmus gelöst werden, der wie folgt beschrieben wird:

- (i) Ordne dem ersten Knoten (d.h. Zustand) im Trellis die Metrik 0 zu.
- (ii) Gehe einen Zweig tiefer in den Trellis. Für jeden Knoten dieser Tiefe ist folgendes zu tun:
 - (a) Addiere die Zweig-Metrik jedes eintreffenden Zweiges zur Metrik des vorangegangenen Knotens am Anfang des entsprechenden Zweiges, um die gleiche Anzahl provisorische Knoten-Metriken zu erhalten wie eintreffende Zweige.
 - (b) Erhebe die kleinste dieser provisorischen Knoten-Metriken zur (definitiven) Knotenmetrik. Entferne alle in diesen Knoten eintreffenden Zweige ausser denjenigen (oder einen derjenigen, falls mehrere), von welchem jene kleinste Knotenmetrik stammt.
- (iii) Beende die Schleife, wenn am Trellis-Ende angelangt, andernfalls gehe zu Punkt (ii).

Fig. 9.5.6 zeigt das Trellis-Diagramm von Fig. 9.5.5, nachdem der Viterbi-Algorithmus auf alle Zweig- und Knoten-Metriken angewendet worden ist. Ein in Schritt (ii) entfernter Zweig ist in Fig.9.5.6 mit einem Kreuz (×) gekennzeichnet. Werden vom Trellis-Ende her rückwärts die verbleibenden Zweige durchschritten, stellt sich heraus, dass es nur noch einen Pfad gibt, welcher zur Daten-Sequenz

$$\mathbf{u} = (+1, -1, -1)$$

gehört; diese ist nämlich unsere ML-Entscheidung $\hat{\mathbf{U}}$ für \mathbf{U} .

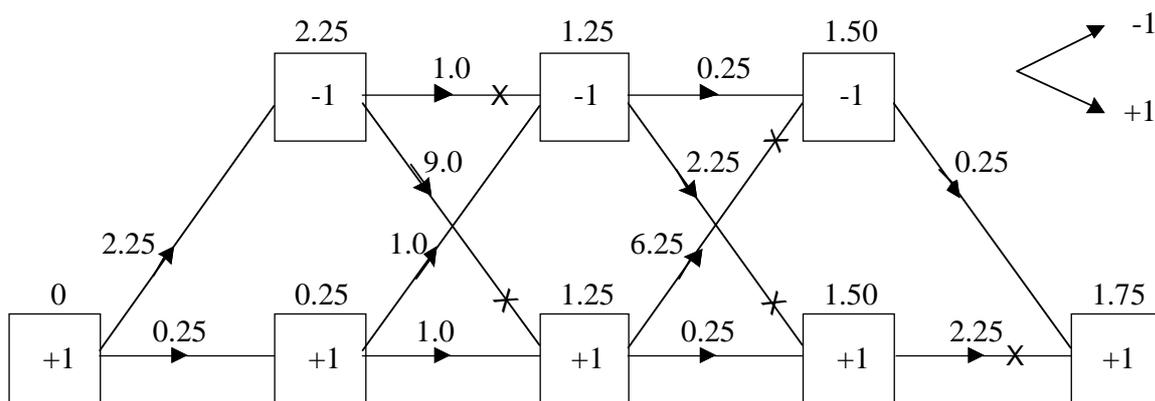


Fig. 9.5.6: Trellis von Fig. 9.5.5, auf welchen der Viterbi-Algorithmus angewendet wurde.

Um zu zeigen, dass der Viterbi-Algorithmus stets den optimalen Pfad durch den Trellis hindurch findet, argumentieren wir wie folgt:

Falls der Viterbi-Algorithmus einen Zweig in Punkt (ii)(b) entfernt, dann liegt dieser Zweig auch nicht auf einem optimalen Pfad (oder auf dem alleinigen optimalen Pfad) durch den Trellis hindurch, bevor dieser Zweig entfernt wurde.

Die provisorische Metrik für diesen entfernten Zweig war grösser als jene für den beibehaltenen Zweig, der zum *selben Zustand* führt. Da aber beide Pfade zu diesem Zustand gleichermassen durch den Trellis hindurch vervollständigt werden können, gibt es einen besseren kompletten Pfad durch den beibehaltenen Zweig mit kleinerer Metrik als der bestmögliche durch einen entfernten Zweig. Letzterer war folglich kein optimaler Pfad durch den Trellis. Falls ein entfernter Zweig dieselbe provisorische Metrik ergab wie der beibehaltene Zweig, dann weist der beste Pfad durch den beibehaltenen Zweig dieselbe Gesamtmetrik auf wie der beste durch den entfernten Zweig. Folglich war der entfernte Zweig nicht Teil eines optimalen Pfades, oder zumindest nicht der einzige optimale Pfad durch den Trellis. Man beachte, dass der Viterbi-Algorithmus nur einen einzigen eintreffenden Zweig pro Zustand übriglässt. Wenn somit dieser Algorithmus terminiert, bleibt ein einziger Pfad übrig, der durch Rückwärtsschreiten entlang der beibehaltenen Zweige vom letzten Trellis-Knoten aus gefunden werden kann. Dieser einzige übrige Pfad muss folglich (einer) der optimale(n) Pfad(e) durch den Trellis hindurch sein.

Wir wollen nun die anhand des Beispiels angewandten Konzepte verallgemeinern.

Die Menge aller Ausgangssequenzen einer endlichen Zustandsmaschine mit spezifiziertem Anfangs- und Endzustand ist die Menge aller möglichen Pfade vom Anfangs- zum Endknoten des entsprechenden Trellis.

Wenn immer ein ML Entscheidungsproblem auf folgende zwei Probleme reduziert werden kann, dann kann die Aufgabe, einen ML-Pfad zu finden, mit dem Viterbi-Algorithmus durchgeführt werden:

- (1) Abhängig von der Beobachtung jedem Zweig in einem Trellis eine Zweigmetrik zuweisen.
- (2) Den Pfad durch den Trellis mit der minimalen (oder maximalen) Summe der Zweigmetriken finden.

Erstaunlich viele Aufgabenstellungen der modernen Nachrichtentechnik lassen sich in der obigen Form darstellen. Wenn immer die Zahl der Zustände einer endlichen Zustandsmaschine nicht zu gross ist (d.h. z.B. nicht grösser als $2^{10} = 1024$), kann der Viterbi-Algorithmus für ML-Entscheidungen in Betracht gezogen werden.

Kapitel 10

Schätzungstheorie

10.1 Einführung

Das allgemeine Problem der Schätzungstheorie besteht darin, einen auf einer bestimmten Beobachtung basierenden Wert zu ermitteln. Dieser Wert sollte möglichst nahe zu jenem sein, den ein Zufallsvektor (oder eine Zufallsgrösse) einnimmt. Das Blockschaltbild in Figur 10.1.1 illustriert das allgemeine Schätzproblem. Der Beobachter nimmt den Wert \mathbf{y} des Zufallsvektors \mathbf{Y} wahr, um schliesslich eine Schätzung $\mathbf{x} = r(\mathbf{y})$ jenes Wertes zu berechnen, den der Zufallsvektor \mathbf{X} gerade aufweist. Die Funktion $r(\cdot)$ stellt die vom Beobachter verwendete Schätzregel dar.

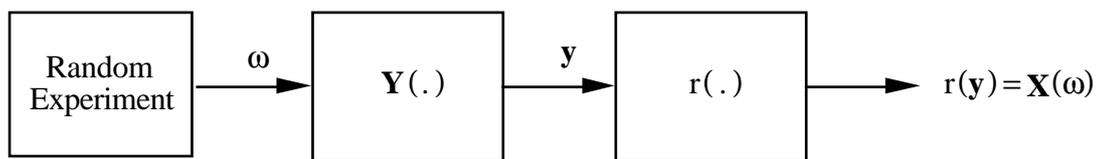


Fig. 10.1.1: Eine Illustration des allgemeinen Schätzproblems.

Der eigentliche Unterschied zwischen einem Entscheidungsproblem und einem Schätzproblem liegt in der Sinnlosigkeit, eine Schätzung als "richtig" oder "falsch" zu beurteilen. Als Beispiel sei eine Zufallsgrösse \mathbf{X} mit $\mathbf{X}(\Omega) = \mathbb{R}$ gegeben (wie eine Gauss'sche Zufallsgrösse mit positiver Varianz). Dann wird mit einer Wahrscheinlichkeit (WSK) von 1 die Schätzung $\mathbf{X} = r(\mathbf{y})$ von \mathbf{X} abweichen (ausser in den allertrivialsten Fällen). Diese Schätzung wird also stets falsch sein. Was aber zählt, ist die *Nähe* einer Schätzung \mathbf{X} zu \mathbf{X} , nicht ihre "Richtigkeit". Ein weniger grundsätzlicher Unterschied ist, wie wir später noch sehen werden, dass es sich für eine Schätzung \mathbf{X} oft als sinnvoll erweist, auch Werte anzunehmen, die \mathbf{X} gar nicht einnehmen kann. Dies würde niemals einen Sinn ergeben, wenn \mathbf{X} eine "Entscheidung" für den Wert eines diskreten Zufallsvektors \mathbf{X} darstellte, da solch eine Entscheidung sicher falsch sein würde.

In Kapitel 7 betrachteten wir eingehend das Problem der Schätzung des *linearen minimalen mittleren Fehlerquadrates* (englisch LMMSE). Hierfür war die Grösse von $E[(\mathbf{X} - \mathbf{X})^2]$ unser Gütekriterium, und von unserer Schätzungsregel $r(\cdot)$ forderten wir, eine lineare Funktion zu sein. Nun wollen wir unsere Aufmerksamkeit allgemeinen Gütekriterien zuwenden und die Einschränkung der Linearität der Schätzregel aufheben.

10.2 Bayes'sche Schätzung

Vielfach ermöglichen es die Umstände, eine Kostenfunktion $s(\cdot, \cdot)$ in einem Schätzproblem einzuführen. Dabei stellt $s(x, \hat{x})$ die Kosten dar, die entstehen, wenn \mathbf{X} den Wert x , die Schätzung $\hat{\mathbf{X}}$ aber den Wert \hat{x} einnimmt. Wenn zum Beispiel \mathbf{X} eine Zufallsgrösse ist, könnte die "Energie" des Fehlers $x - \hat{x}$ die Kostenfunktion verkörpern, nämlich $s(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$. Wir definieren die Zufallsgrösse S als die Kosten einer Schätzung und schreiben $S = s(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = s(\mathbf{X}, r(\mathbf{Y}))$.

Das allgemeine Bayes'sche Schätzproblem

- (1) Die bedingte WSK-Dichte $p_{Y|X}(\cdot|\mathbf{x})$ der Beobachtung \mathbf{Y} sei für alle möglichen Werte \mathbf{x} von \mathbf{X} bekannt. Des weiteren sei auch die *a priori* WSK-Dichte $p_X(\cdot)$ bekannt sowie eine Kostenfunktion $s(\cdot, \cdot)$ spezifiziert, wobei $s(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ die Kosten sind, wenn \mathbf{X} den Wert \mathbf{x} hat und die Schätzung $\hat{\mathbf{X}}$ den Wert $\hat{\mathbf{x}}$.
- (2) Wir wollen eine Schätzregel $r(\cdot)$ finden, so dass $\hat{\mathbf{X}} = r(\mathbf{Y})$ die erwarteten Kosten der Schätzung $E[S] = E[s(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})] = E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{Y}))]$ minimiert.

Dieses Problem kann zumindest prinzipiell überraschend einfach gelöst werden. Wird die integrale Form des Satzes vom totalen Erwartungswert (8.5.12) benützt, erhalten wir

$$\begin{aligned} E[S] &= E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{Y}))] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{Y})) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] p_Y(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

Aus der Bedingung $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ folgt, dass $r(\mathbf{Y}) = r(\mathbf{y})$ woraus ersichtlich ist, dass:

$$E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{Y})) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{y})) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \quad (10.2.2)$$

Wird nun (10.2.2) in (10.2.1) eingesetzt, resultiert

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[s(\mathbf{X}, r(\mathbf{y})) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] p_Y(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (10.2.3)$$

Da $p_Y(\cdot)$ nicht negativ ist, können wir folglich das Integral in (10.2.3) minimieren, indem wir für jedes \mathbf{y} die Schätzung $r(\mathbf{y})$ so wählen, dass der bedingte Erwartungswert im Integral minimiert wird.

Die Bayes'sche Schätzregel, d.h. die Schätzregel, welche $E[S]$ minimiert, lautet: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $r(\mathbf{y})$ als $\hat{\mathbf{x}}$, das den bedingten Erwartungswert $E[s(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$ minimiert.

Beispiel 10.2.1: Sei $s(x, x) = (x - x)^2$. Dann ist

$$E[s(X, x) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = E[(X - x)^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \quad (10.2.4)$$

Bevor wir durch entsprechende Wahl von x obigen bedingten Erwartungswert minimieren, führen wir den bedingten Mittelwert von X ein, unter der Bedingung, dass $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$:

$$m_x(\mathbf{y}) = E[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \quad (10.2.5)$$

Dann rechnen wir folgendermassen:

$$\begin{aligned} E[(X - x)^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] &= E[(X - m_x(\mathbf{y}) + m_x(\mathbf{y}) - x)^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \\ &= E\left[\left([X - m_x(\mathbf{y})] - [x - m_x(\mathbf{y})]\right)^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}\right] \\ &= E[(X - m_x(\mathbf{y}))^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \\ &\quad - 2E[X - m_x(\mathbf{y}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}](x - m_x(\mathbf{y})) \\ &\quad + E[(x - m_x(\mathbf{y}))^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Der Term

$$E[(X - m_x(\mathbf{y}))^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$$

ist unabhängig von der Wahl von x und ausserdem gilt

$$E[X - m_x(\mathbf{y}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = E[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] - m_x(\mathbf{y}) = 0.$$

Weiter lässt sich vereinfachen:

$$E[(x - m_x(\mathbf{y}))^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = (x - m_x(\mathbf{y}))^2.$$

Hiermit reduziert sich (10.2.6) auf

$$E[(X - x)^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] + (x - m_x(\mathbf{y}))^2, \quad (10.2.7)$$

was durch $x = m_x(\mathbf{y})$ minimiert werden kann. Unter Anwendung der integralen Form des Satzes des totalen Erwartungswertes erhalten wir für dieses Optimum

$$E[(X - X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] p_Y(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (10.2.8)$$

Wir fassen zusammen:

Der *Bayes'sche "MMSE-estimator"*, d.h. die Schätzregel, die den mittleren quadratischen Fehler (MSE) $E[(X - \hat{X})^2]$ minimiert, lautet: Wähle für jedes \mathbf{y} den bedingten Mittelwert $m_X(\mathbf{y}) = E[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$ als die Schätzung $\hat{x} = r(\mathbf{y})$. Der MSE dieser optimalen Schätzregel ist gegeben durch (10.2.8).

Es bleibt zu zeigen, wie man $m_X(\mathbf{y})$ und $\text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$ berechnen kann, obwohl $p_{X|Y}(x|\mathbf{y})$ nicht direkt bekannt ist. Nun gilt aber

$$p_{X|Y}(x|\mathbf{y}) = \frac{p_{Y|X}(\mathbf{y}|x)p_X(x)}{p_Y(\mathbf{y})}, \quad (10.2.9)$$

wobei

$$p_Y(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, \mathbf{y}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Y|X}(\mathbf{y}|x)p_X(x) dx. \quad (10.2.10)$$

Also können wir $p_{X|Y}(x|\mathbf{y})$ finden, denn sowohl

$$m_X(\mathbf{y}) = E[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X|Y}(x|\mathbf{y}) dx \quad (10.2.11)$$

als auch

$$\text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(\mathbf{y}))^2 p_{X|Y}(x|\mathbf{y}) dx \quad (10.2.12)$$

oder äquivalent

$$\text{Var}[X | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = E[X^2 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] - m_X(\mathbf{y})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{X|Y}(x|\mathbf{y}) dx - m_X(\mathbf{y})^2 \quad (10.2.13)$$

können berechnet werden.

Falls X eine nichtnegative ganze Zufallsgrösse darstellt, d.h. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$, so kann es gerne vorkommen, dass der bedingte Mittelwert $m_X(\mathbf{y})$ für ein gegebenes \mathbf{y} gar nicht ganzzahlig ist, so zum Beispiel $m_X(\mathbf{y}) = 7.3$. Hier würden wir solch einen Fall antreffen, wo die Bayes'sche MMSE-Schätzung X einen Wert einnimmt, den X gar nicht einnehmen kann.

Der *Bayes'sche "MMSE-estimator"* $r_{\text{BAYES}}(\cdot)$ ist im allgemeinen keine lineare Funktion, und er wird in diesem Fall einen kleineren MSE erzeugen als die lineare MMSE Schätzregel, welche in Kapitel 7 behandelt wurde. Wenn aber X und \mathbf{Y} eine gaussförmige Verbund-WSK-Dichte aufweisen (was auch von praktischer Bedeutung ist) und beide mittelwertfrei sind, d.h. $E[X] = 0$ sowie $E[\mathbf{Y}] = \mathbf{0}$, dann stellt sich der Bayes'sche "MMSE-estimator" ebenso als lineare Schätzregel heraus. Den Beweis dafür überlassen wir dem wissbegierigen Leser.

10.3 MAP Schätzung

Wir wollen nun jenen Spezialfall der Bayes'schen Schätzung betrachten, in welchem kleine Fehler kostenlos bleiben, aber grosse Fehler alle gleich teuer zu stehen kommen. Präziser ausgedrückt, spezifizieren wir für eine genügend kleine Zahl Δ

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| < \Delta \\ 1, & \text{falls } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \geq \Delta, \end{cases} \quad (10.3.1)$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm kennzeichnet (oder "Länge" eines Vektors im Euklidischen Raum). Für diese Kostenfunktion vereinfacht sich der in der Bayes'schen Schätzregel erscheinende bedingte Erwartungswert wie folgt:

$$\begin{aligned} E[s(\mathbf{X}, \mathbf{x}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - [1 - s(\mathbf{x}, \mathbf{x})]) p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - s(\mathbf{x}, \mathbf{x})) p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\approx 1 - p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) V_{\Delta}. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

V_{Δ} steht für ein kugelförmiges Volumen mit Radius Δ im Euklidischen Raum, dessen Dimension mit jener von \mathbf{x} übereinstimmt. Die Bayes'sche Schätzregel reduziert sich also auf eine Wahl von \mathbf{x} , das die *a posteriori* WSK-Dichte $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ maximiert; deswegen trägt diese Regel auch den Namen *MAP-Schätzregel* (wobei MAP wiederum die Abkürzung für "maximum a posteriori" ist).

Wenn $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$, folgt aus (8.5.8), dass

$$p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}. \quad (10.3.3)$$

Das Maximieren von $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ durch ein geeignetes \mathbf{x} ist also äquivalent zum Maximieren von $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$.

Wir fassen zusammen:

Die Bayes'sche Schätzungsregel für den Fall, *wenn kleine Fehler gratis und alle anderen Fehler gleich teuer sind*, heisst *MAP-Schätzungsregel*, die wie folgt umschrieben werden kann: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $\mathbf{r}(\mathbf{y})$ als den Wert \mathbf{x} , der $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ maximiert.

10.4 Maximum-Likelihood Schätzung

Wir wollen nun annehmen, dass der Zufallsvektor \mathbf{X} gleichmässig über eine bestimmte Region im Euklidischen Raum verteilt ist, d.h. dass $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ den Wert $c > 0$ für alle \mathbf{x} in dieser Region hat, und überall sonst den Wert 0. Auf eine mathematisch korrektere Art lässt sich sagen, dass $p_{\mathbf{X}}(\cdot)$ über seinen Support $\text{supp}(p_{\mathbf{X}})$ konstant bleibt. (Der *Support* irgendeiner reellwertigen Funktion $f(\cdot)$ ist mit $\text{supp}(f)$ bezeichnet und ist definiert als jener Teil des Definitionsbereichs von f , in welchem f ungleich null ist.) Die MAP-Regel lautet für diesen Fall folgendermassen: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $r(\mathbf{y})$ als den Wert \mathbf{x} in $\text{supp}(p_{\mathbf{X}})$, das $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ maximiert. Auf dieser Herleitung ist die folgende Definition begründet:

Die *Maximum-Likelihood (ML) Schätzregel* lautet: Wähle für jedes \mathbf{y} dasjenige $r(\mathbf{y})$ als den Wert \mathbf{x} in $\text{supp}(p_{\mathbf{X}})$, welcher $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ maximiert.

Man beachte, dass beim Gebrauch der ML-Entscheidungsregel die Kenntnis der *a priori* WSK-Dichte $p_{\mathbf{X}}(\cdot)$ nicht im Detail benötigt wird; wir sollten lediglich wissen, wo diese WSK-Dichte einen (positiven) Wert aufweist (was in praktischen Anwendungen meistens der Fall ist).

Die ML-Schätzregel ist sehr robust und äusserst beliebt in der Nachrichtentechnik. Ebenso weist sie dieselbe Eigenschaft auf wie ihr Gegenstück aus der Entscheidungstheorie, nämlich:

Invertierbarkeitsprinzip für ML-Schätzungen:

Sei $\mathbf{X} = f(\mathbf{U})$, wobei $f: \text{supp}(p_{\mathbf{U}}) \rightarrow \text{supp}(p_{\mathbf{X}})$ eine invertierbare Funktion ist [d.h. $\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{X})$]. Dann ist $\hat{\mathbf{X}}$ nur dann die ML-Schätzung von \mathbf{X} aus der Beobachtung \mathbf{Y} , falls $\hat{\mathbf{U}} = f^{-1}(\hat{\mathbf{X}})$ die ML-Schätzung von \mathbf{U} aus derselben Beobachtung \mathbf{Y} ist.

Diese Eigenschaft ist die einfache Konsequenz der Tatsache, dass $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = p_{\mathbf{Y}|\mathbf{U}}(\mathbf{y}|f^{-1}(\mathbf{x}))$ für alle \mathbf{x} in $\text{supp}(p_{\mathbf{X}})$. Der Leser soll jedoch dieses Invertierbarkeitsprinzip für ML-Schätzungen nicht als zu "selbstverständlich" hinnehmen, denn diese Eigenschaft gilt im allgemeinen *nicht* für andere Entscheidungsregeln wie zum Beispiel für die Bayes'sche MMSE-Schätzung. In der Tat ist die Gültigkeit des Invertierbarkeitsprinzips für ML-Schätzungen ein Hauptgrund, warum diese Regel einfach zu finden und in praktischen Problemen zu implementieren ist.

Anhang A

Über verallgemeinerte Funktionen und den Dirac-Stoss

Dem Leser ist sicher schon bekannt, dass der Dirac-Stoss (oder “Delta-Funktion”) $\delta(\cdot)$ eigentlich keine Funktion ist. Andererseits weiss er, dass man mit $\delta(\cdot)$ fast so arbeiten kann, wie wenn $\delta(\cdot)$ tatsächlich eine Funktion wäre. Um den Dirac-Stoss mathematisch sauber zu behandeln, braucht man eine Verallgemeinerung des Begriffs “Funktion”. Diese Verallgemeinerung kann in verschiedener Art und Weise durchgeführt werden. Wir geben hier eine Verallgemeinerung an, die besonders einfach ist, die aber auch die wichtigsten Aspekte jeder Verallgemeinerung enthält.

In diesem Anhang meinen wir mit “Funktion” eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen, d.h. eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Leser weiss von den Vorlesungen in Analysis, dass man auch “pathologische” Funktionen definieren kann, z.B. die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

[Für diese Funktion gilt $|f(x)| = 1$ für alle x und damit ergibt sich $\int_a^b |f(x)| dx = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Aber $\int_a^b f(x) dx$ existiert nicht als Riemannsches Integral, im Widerspruch zu Behauptung 7 in §3.1.7.2 des Taschenbuchs der Mathematik [1]! Der Leser sollte lernen, jeder mathematischen Behauptung misstrauisch gegenüber zu stehen, für die er keinen Beweis gesehen hat. Damit sich $\int_a^b f(x) dx = b - a$ ergibt, muss man eine Verallgemeinerung des Riemannsches Integrals benutzen, z.B. das Lebesguesche Integral.] Solche pathologischen Funktionen bereiten grosse Mühe in der Analysis, obwohl sie in praktischen Anwendungen kaum vorkommen. Ein Hauptziel einer Theorie der verallgemeinerten Funktionen ist es, diese pathologischen Funktionen für immer zu eliminieren, sodass man mit einfachen Mitteln sauber mathematisch arbeiten kann. Als Vorbereitung für eine solche Theorie führen wir nun zwei Klassen nicht pathologischer Funktionen ein. Aber zuerst eine Bemerkung zur Notation: Man schreibt

$$f(t_0+), f(t_0-), f(+\infty), f(-\infty)$$

für

$$\lim_{t \downarrow t_0} f(t), \lim_{t \uparrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t).$$

$f^{(i)}$ bezeichnet die i -te Ableitung von f , wobei $f^{(0)} = f$. Man schreibt auch $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, usw.

Definition: Eine Funktion f heisst **glatt**, wenn f beliebig oft differenzierbar ist, und wenn

$$f^{(i)}(+\infty) = f^{(i)}(-\infty) = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

gilt.

Beispiel 1: Die Funktionen e^{-t^2} und $\frac{\sin(t)}{t}$ sind glatt. Die Funktion $e^{-|t|}$ ist nicht glatt, weil sie in $t = 0$ nicht differenzierbar ist. Die Funktion $f(t) = t$ ist nicht glatt, weil $f(+\infty)$ und $f(-\infty)$ nicht existieren.

Die folgenden Tatsachen liegen auf der Hand:

Sei f eine glatte Funktion, dann sind sowohl cf für jedes $c \in \mathbb{R}$ als auch $f^{(i)}$ für jede positive, ganze Zahl i ebenfalls glatte Funktionen.
Seien f_1 und f_2 glatte Funktionen, dann ist auch $f_1 + f_2$ eine glatte Funktion.

Definition: Eine Funktion f heisst **brav**, wenn

- (i) f stetig ist;
- (ii) $f(t) = 0$ für alle t ausserhalb eines endlichen Intervalls;
- (iii) es eine ganze Zahl m gibt, so dass f beliebig oft differenzierbar ist ausser in höchstens m Punkten innerhalb jedes Intervalls der Länge 1; und
- (iv) in jedem Punkt t_0 , wo f nicht beliebig oft differenzierbar ist, $f^{(i)}(t_0+)$ und $f^{(i)}(t_0-)$ für jede positive, ganze Zahl i existieren.

Wieder liegen folgende Tatsachen auf der Hand:

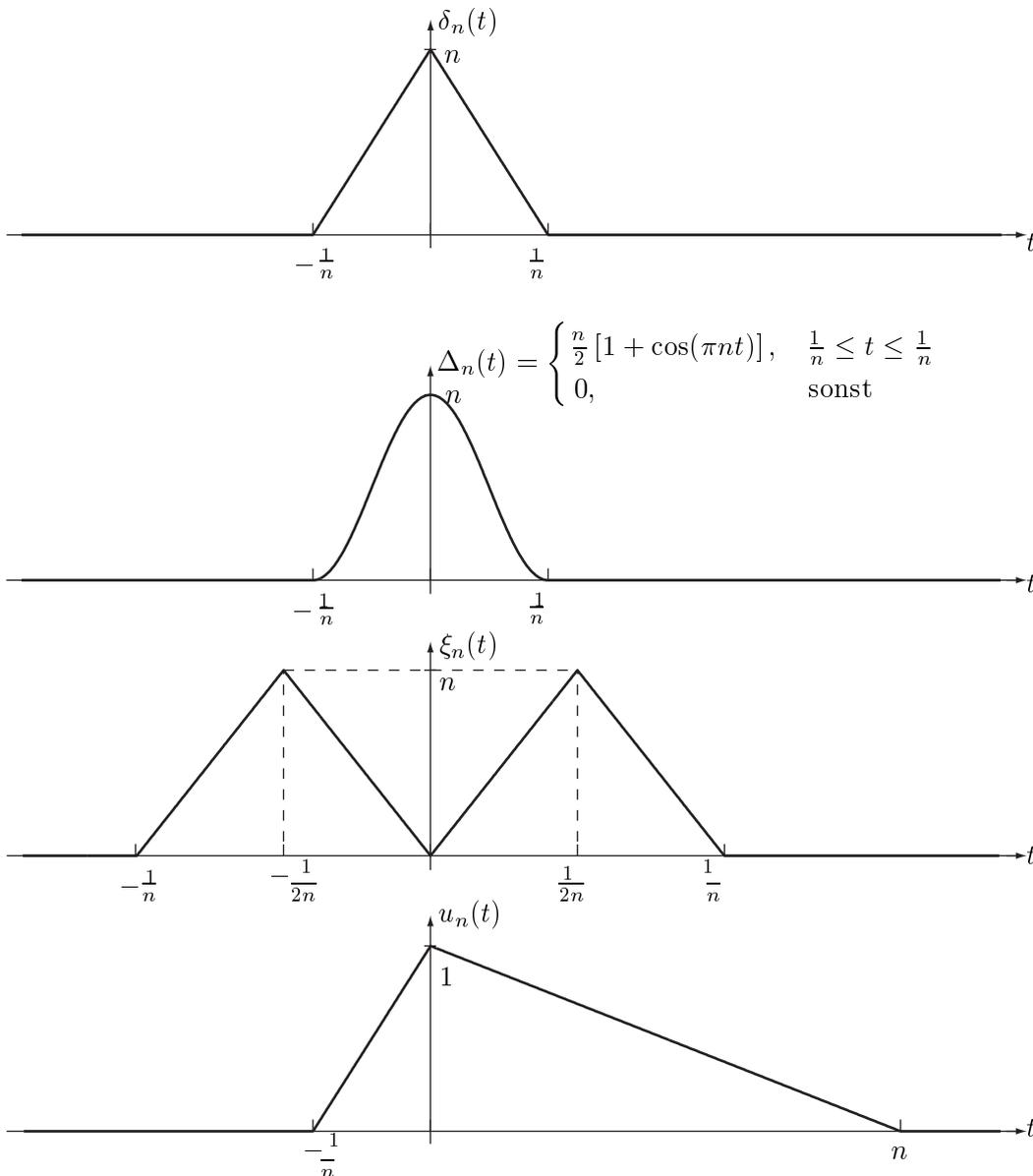
Sei f eine brave Funktion, dann ist auch cf für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine brave Funktion.
Seien f_1 und f_2 brave Funktionen, dann ist auch $f_1 + f_2$ eine brave Funktion.
Sei f eine brave Funktion, die zudem differenzierbar ist, dann ist auch f' eine brave Funktion.

Für eine brave Funktion f gilt trivialerweise:

$$f^{(i)}(+\infty) = f^{(i)}(-\infty) = 0 \quad (\text{A.2})$$

für jede nichtnegative ganze Zahl i .

Beispiel 2: Für jede positive, ganze Zahl n ist jede der folgenden vier Funktionen brav:



Wenn wir eine Funktion f in der realen Welt beobachten, können wir $f(t_1)$ und $f(t_2)$ nicht unterscheiden, falls t_1 und t_2 genügend nahe beieinander liegen. Tatsächlich ist jede Beobachtung irgendwie ein Durchschnitt vieler Werte der Funktion f . Wir können dann jede Beobachtung von f als ein Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)w(t)dt$ für irgendeine Fensterfunktion w betrachten. Aber die Fensterfunktionen, die physikalisch sinnvoll sind, müssen "glatt" sein. In einem gewissen Sinn können wir dann sagen, dass die Funktionen f_1 und f_2 "physikalisch identisch" sind, falls gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)w(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)w(t)dt$$

für jede glatte Funktion w . Diese Betrachtungen sind die Basis für die folgende Definition:

Eine Sequenz g_1, g_2, g_3, \dots von braven Funktionen mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)w(t)dt$$

für jede glatte Funktion w existiert, spezifiziert eine **verallgemeinerte Funktion (v-Funktion)** g durch die Regel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)w(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)w(t)dt, \quad (\text{A.3})$$

wobei w eine beliebige glatte Funktion ist.

Bemerkung: Wir erinnern den Leser daran, dass ein Limes genau dann “existiert” (z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$), wenn dieser Limes einen bestimmten reellen Wert hat (d.h. $-\infty < a < \infty$). Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ bzw. $-\infty$, dann “existiert” der Limes nicht.

Spezifizieren die Sequenzen von braven Funktionen g_n und γ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) die v-Funktionen g und γ , dann spezifizieren die folgenden Sequenzen ebenfalls v-Funktionen:

- (i) $g_n(\cdot - t_0)$ für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$,
- (ii) $cg_n(\cdot)$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$, und
- (iii) $g_n(\cdot) + \gamma_n(\cdot)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Man schreibt sie als:

- (i) $g(\cdot - t_0)$,
- (ii) $cg(\cdot)$, und
- (iii) $g(\cdot) + \gamma(\cdot)$.

Beispiel 3: Die Funktionen δ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) in Beispiel 2 spezifizieren die v-Funktion $\delta(\cdot)$ in der Weise, dass gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)w(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{+\infty} \delta_n(t)w(t)dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)w(t)dt \\ &= w(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t)dt \\ &= w(0) \end{aligned}$$

für jede glatte Funktion w . Diese einfache v-Funktion $\delta(\cdot)$ ist nichts anderes als der berühmte Dirac-Stoß.

Wenn wir uns nun an unsere Betrachtungen über “physikalisch identische” Funktionen erinnern, so müssen wir zu folgender Definition gelangen:

Zwei Sequenzen g_1, g_2, g_3, \dots und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ von braven Funktionen spezifizieren dieselbe v -Funktion, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)w(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n(t)w(t)dt$$

für jede glatte Funktion w gilt.

Beispiel 4: Für die Funktionen Δ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) in Beispiel 2 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n(t)w(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \Delta_n(t)w(t)dt \\ &= w(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \Delta_n(t)dt \\ &= w(0) \end{aligned}$$

für jede glatte Funktion w . Es folgt dann aus Beispiel 3, dass die Sequenz $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ ebenfalls den Dirac-Stoss spezifiziert. Der Leser sollte jetzt zeigen, dass die Sequenz $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ im Beispiel 2 auch den Dirac-Stoss spezifiziert.

Man sieht, dass die ganze Geschichte des Dirac-Stosses in der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)w(t)dt = w(0) \quad (\text{A.4})$$

liegt, die für jede glatte Funktion w gilt. Man kann aber (A.4) nicht als Definition des Dirac-Stosses benutzen (obwohl genau das in vielen nachlässigen Herleitungen des Dirac-Stosses getan wird), es sei denn, es gebe eine echte Funktion $\delta(\cdot)$, so dass (A.4) für jede glatte Funktion w gilt. Leider gibt es keine solche Funktion, und genau deshalb führen wir überhaupt den Begriff der verallgemeinerten Funktion ein.

Obwohl für eine v -Funktion g der Grenzwert in (A.3) nur dann immer existiert, wenn w eine glatte Funktion ist, können wir unsere Regel (A.3) erweitern zu

$$\int_a^b g(t)f(t)dt \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t)f(t)dt \quad (\text{A.5})$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für jede Funktion f , deren Grenzwert nach (A.5) existiert.

Beispiel 5: Aus Beispiel 3 oder Beispiel 4 ersehen wir, dass für den Dirac-Stoss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (\text{A.6})$$

gilt für jede Funktion f , die stetig ist im Punkt $t = 0$. Diese Eigenschaft (A.6) heisst die **Siebungs-Eigenschaft** des Dirac-Stosses.

Beispiel 6: Die Sequenz u_1, u_2, u_3, \dots von braven Funktionen in Beispiel 2 spezifiziert die

v-Funktion u . Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)w(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t)w(t)dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^n u_n(t)w(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} w(t)dt \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

für jede glatte Funktion w .

Für die **Einheitsschrittfunktion** $u(\cdot)$, die wie folgt definiert ist:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$$

(wobei der Wert $u(0)$ willkürlich gewählt wurde; oft setzt man auch $u(0) = 1$), gilt auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)w(t)dt = \int_0^{\infty} w(t)dt$$

für jede glatte Funktion w . Also können wir sagen, dass die v-Funktion u in Beispiel 6 identisch ist mit der Einheitsschrittfunktion $u(\cdot)$. Eine v-Funktion kann also auch eine gewöhnliche Funktion sein. Tatsächlich gibt es für jede Funktion $\gamma(\cdot)$, die “physikalisch sinnvoll” ist, eine v-Funktion g , so dass g identisch ist mit der Funktion γ .

Andererseits gibt es v-Funktionen (z.B. den Dirac-Stoß), die mit keiner gewöhnlichen Funktion identisch sind. In diesem Sinne ist eine v-Funktion eine echte Verallgemeinerung einer Funktion.

Man kann weiter in diese Richtung gehen. Sei g eine v-Funktion und sei f eine Funktion, so dass

$$\int_a^b g(t)w(t)dt = \int_a^b f(t)w(t)dt \quad (\text{A.8})$$

für jede glatte Funktion w gilt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$; dann sagt man, dass g und f im geschlossenen Intervall $[a, b]$ identisch sind. Falls f stetig ist in $[a, b]$, sagt man sogar, dass

$$g(t) = f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (\text{A.9})$$

In diesem Sinne (und nur in diesem Sinne) kann man manchmal (aber nicht immer!) vom Wert der v-Funktion g auf einem Punkt t sprechen.

Beispiel 7: Für $a < b < 0$ gilt:

$$\int_a^b \delta(t)w(t)dt = 0 = \int_a^b 0 \cdot w(t)dt.$$

Also gilt:

$$\delta(t) = 0, \quad t < 0. \quad (\text{A.10})$$

Analog sieht man, dass

$$\delta(t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.11})$$

gilt. Aber es ist nicht möglich, den Wert “ $\delta(0)$ ” zu definieren. Sogar “ $\delta(0) = +\infty$ ” ist nicht sinnvoll, wie wir bald sehen werden. Vielleicht ist diese Tatsache schon von den Funktionen ξ_n im Beispiel 2 offensichtlich; für alle diese Funktionen gilt $\xi_n(0) = 0$, obwohl die Sequenz $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ den Dirac-Stoss spezifiziert!

[Gleichungen (A.10) und (A.11) zusammen mit (A.6) bilden die “Definition” des Dirac-Stosses in ungenauen Behandlungen dieser v-Funktion.]

Sei g_1, g_2, g_3, \dots eine Sequenz braver Funktionen, die eine v-Funktion g spezifizieren, und seien weiterhin diese braven Funktionen auch differenzierbar. (Somit ist auch g'_1, g'_2, g'_3, \dots eine Sequenz braver Funktionen.) Dann spezifiziert die Sequenz g'_1, g'_2, g'_3, \dots eine v-Funktion g' , welche die **Ableitung der v-Funktion** g heisst. Um zu sehen, dass g'_1, g'_2, g'_3, \dots tatsächlich eine v-Funktion spezifizieren, gehen wir wie folgt vor: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g'_n(t)w(t)dt &= g_n(t)w(t) \Big|_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)w'(t)dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)w'(t)dt \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

für jede glatte Funktion w , wobei wir (A.1) und (A.2) benutzt haben. Die Existenz des Grenzwertes (A.12) für $n \rightarrow \infty$ folgt aus der Tatsache, dass g eine v-Funktion und $w'(t)$ eine glatte Funktion ist.

Wir haben damit bewiesen:

Sei g' die Ableitung der v-Funktion g , dann ist g' die v-Funktion, für die gilt:

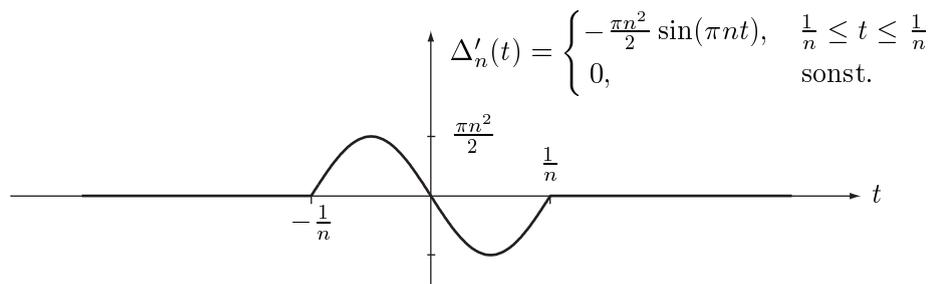
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)w(t)dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)w'(t)dt \quad (\text{A.13})$$

Beispiel 8: Für die Ableitung δ' des Dirac-Stosses δ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)w(t)dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)w'(t)dt \\ &= -w'(0) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

für jede glatte Funktion w , wobei wir (A.4) benutzt haben.

Der aufmerksame Leser bemerkt, dass wir (A.14) hergeleitet haben, ohne eine Sequenz von braven Funktionen zu finden, die den Dirac-Stoss δ spezifiziert. Tatsächlich ist die brave Funktion δ_n in Beispiel 2 nicht differenzierbar in den Punkten $t = -\frac{1}{n}$, $t = 0$ und $t = \frac{1}{n}$. Doch die brave Funktion Δ_n in Beispiel 2 ist differenzierbar, und zwar wie folgt:



Also können wir $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \dots$ als eine Sequenz von braven Funktionen wählen, welche die v -Funktion δ' spezifiziert.

Wie (A.10) und (A.11) aus (A.4) folgen, so folgt aus (A.14), dass

$$\delta'(t) = 0, \quad \text{alle } t \neq 0. \quad (\text{A.15})$$

Aber man kann $\delta'(0)$ nicht sinnvoll festlegen, ebensowenig wie $\delta(0)$. Sonst müssen wir von " $\delta(0) = +\infty$ " den Unsinn schliessen, dass " $\delta(\cdot) = \delta'(\cdot)$ " gilt.

Wir überlassen dem Leser den (nichttrivialen) Beweis, dass man für jede v -Funktion g eine Sequenz g_1, g_2, g_3, \dots von differenzierbaren braven Funktionen finden kann, die g spezifiziert.

[Hinweis: Sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ eine Sequenz von braven Funktionen, die nicht alle differenzierbar sind. Zeige, dass man eine Sequenz f_1, f_2, f_3, \dots von braven Funktionen finden kann mit folgenden Eigenschaften:

- (i) f_n ist nur in den (höchstens endlich vielen Punkten) nicht beliebig oft differenzierbar, wo auch γ_n nicht beliebig oft differenzierbar ist.
- (ii) In diesen Punkten t muss gelten: $f'_n(t-) = -\gamma'_n(t-)$ und $f'_n(t+) = -\gamma'_n(t+)$.
- (iii) Ausserdem soll $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein.

Es folgt dann, dass $g_n = f_n + \gamma_n$ eine differenzierbare brave Funktion ist. Weiter folgt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)w(t)dt = 0$ für jede glatte Funktion w ist, weil w stetig ist im geschlossenen Intervall $[a, b]$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)w(t)dt = 0$ für jede glatte Funktion w , und wir können schliessen, dass die v -Funktion f identisch ist mit der Nullfunktion. Daraus ergibt sich, dass g_1, g_2, g_3, \dots die gewünschte Sequenz ist.]

Wir schliessen daraus:

Die Ableitung g' einer v -Funktion g existiert immer.

Aus (A.13) und (A.14) folgt allgemein für die i -te Ableitung $\delta^{(i)}$ des Dirac-Stosses δ , dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(i)}(t)w(t)dt = (-1)^i w^{(i)}(0) \quad (\text{A.16})$$

für jede glatte Funktion w gilt. Analog zur Herleitung von (A.15) folgt auch, dass

$$\delta^{(i)}(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (\text{A.17})$$

für die i -te Ableitung von δ gilt. Nun müsste auch ganz klar sein, dass $\delta^{(i)}(0)$ nicht sinnvoll definiert werden kann!

Beispiel 9: Für die v -Funktion u (die identisch mit der Einheitsschrittfunktion ist) folgt aus (A.13), (A.7) und (A.1), dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)w(t)dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)w'(t)dt \\ &= - \int_0^{\infty} w'(t)dt \\ &= -w(t)|_{t=0}^{\infty} \\ &= w(0) \end{aligned}$$

für jede glatte Funktion w gilt. Es folgt nun aus (A.4), dass $\delta = u'$, d.h.:

Der Dirac-Stoss ist die Ableitung der Einheitsschrittfunktion.

Der Leser hat sicher diese Tatsache bereits intuitiv beim Arbeiten mit dem Dirac-Stoss verwendet.

Bemerkung: Der Franzose *Laurent Schwartz* war der erste, der in seinem 1950-1951 veröffentlichten Buch [2] eine mathematisch saubere Behandlung des Dirac-Stosses und ähnlicher “verallgemeinerter Funktionen” vorgeführt hat. Seine Theorie wurde von zwei Engländern (*G. Temple* und *M.J. Lighthill*) sukzessive vereinfacht. Die obige Behandlung folgt im Geist dem Text von Lighthill (siehe [3]), enthält aber zusätzliche Vereinfachungen.

Der Leser sollte sich im Klaren sein, dass “glatte” und “brave” Funktionen keine Standardbegriffe in der Mathematik darstellen. Wir hoffen aber, dass diese zwei Begriffe ihm von Nutzen sind.

Literatur

- [1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew; “Taschenbuch der Mathematik”; Verlag Harri Deutsch, Thun, 1984.
- [2] L. Schwartz; “Théorie des distributions”; Hermann, Paris, 1950-1951; 2 Bände.
- [3] M.J. Lighthill; “Fourier Analysis and Generalized Functions”; Cambridge University Press, 1962.

Anhang B

Partialbruchzerlegung

Im folgenden soll dem Leser eine sehr praktische Anleitung für eine effiziente und schnelle Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung vermittelt werden. Als *Einstiegs motivation* wollen wir eine kontinuierliche Übertragungsfunktion in Partialbrüche zerlegen. Die folgende Tabelle enthält zwei Methoden, die zum gleichen Ziel führen.

1. Methode	2. Methode
$T(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$	
$= \frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$ $= \frac{(A+B)s+(2A+B)}{s^2+3s+2}$ <p>Koeffizientenvergleich:</p> $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\implies A = 2 \quad B = -1$	$A = \left. \frac{s+3}{s+2} \right _{s=-1} = 2$ $B = \left. \frac{s+3}{s+1} \right _{s=-2} = -1$ <p>(Zeit sparen)</p>
$T(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$	

Der Zweck dieser Tabelle besteht darin, dem Leser vor Augen zu führen, dass die zweite, im folgenden beschriebene Methode *viel schneller* zum Ziel führt als die erste. Die vorliegende Anleitung zeigt im speziellen die Handhabung von *zeitdiskreten* Übertragungsfunktionen und erklärt den Umgang mit Sonderfällen wie der von mehrfachen Polen. Die Problemstellung wird in *drei Abschnitte* geteilt, wobei der erste Abschnitt die Schaffung von günstigen Voraussetzungen für die Bearbeitung von Übertragungsfunktionen beinhaltet. Im zweiten Abschnitt wird (ohne Begründung) die Methode der Partialbruchzerlegung erklärt, und der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Transformation vom *z*-Bereich in den diskreten Zeitbereich. Am Schluss dieser Anleitung befindet sich eine Tabelle mit den *gebräuchlichsten Fällen* der Partialbruchzerlegung.

Abschnitt 1: Voraussetzungen

Damit die Partialbruchzerlegung nach Abschnitt 2 überhaupt durchgeführt werden kann, muss die folgende Bedingung erfüllt sein.

Der Grad des Zählerpolynoms von $H(z)$ muss um mindestens eins kleiner sein als jener des Nennerpolynoms.

Es wird sich zeigen, dass es sowieso günstiger ist, eine Zerlegung von $\frac{H(z)}{z}$ durchzuführen anstatt von $H(z)$. Die einzelnen Partialbrüche können dann wieder mit z multipliziert werden, und wir erhalten Terme, die sich einfacher rücktransformieren lassen. Wenn wir davon ausgehen, dass das Zählerpolynom höchstens den gleich grossen Grad aufweist wie das Nennerpolynom, ist nach unserer Division von $H(z)$ durch z obige Bedingung immer erfüllt. Ansonsten ist für die Zählergrad-Reduktion eine Polynomdivision erforderlich, welche aber selten zum Einsatz kommt, da die Impulsantwort einer solchen Übertragungsfunktion akausal wird.

Zur Veranschaulichung führen wir zwei Beispiele ein, auf welche wir auch in Abschnitt 2 und 3 zurückkommen werden.

Beispiel 1a: Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$H_1(z) = \frac{z^2(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

Da sich mindestens eine Nullstelle im Ursprung befindet, lässt sie sich wegkürzen:

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{z(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

Beispiel 2a: Die Übertragungsfunktion $H_2(z)$ wird ebenfalls durch z dividiert:

$$H_2(z) = \frac{2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{H_2(z)}{z} = \frac{2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2}{z\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

Abschnitt 2: Partialbruchzerlegung

Wir gehen von einer möglichst allgemeinen Definition einer Übertragungsfunktion aus und definieren

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = \frac{(z - n_1) \cdots (z - n_n)}{(z - p_0)^l (z - p_1) \cdots (z - p_{m-l})} = \frac{\alpha(z)}{\gamma(z) \cdot \sigma(z)} \\ \gamma(z) &= (z - p_0)^l \quad \text{und} \quad \sigma(z) = (z - p_1) \cdots (z - p_{m-l}) \\ \sigma_i(z) &= \frac{\sigma(z)}{z - p_i} \end{aligned}$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Bedingung von Abschnitt 1 erfüllt ist und nehmen an, dass der Grad von $\alpha(z)$ kleiner ist als jener von $\beta(z)$. $\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ lässt sich dann wie folgt in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{(z - n_1) \cdots (z - n_n)}{(z - p_0)^l (z - p_1) \cdots (z - p_{m-l})} = \frac{A_l}{(z - p_0)^l} + \frac{A_{l-1}}{(z - p_0)^{l-1}} + \cdots + \frac{A_1}{z - p_0} + \frac{B}{z - p_1} + \cdots + \frac{Q}{z - p_{m-l}}$$

Die Partialbruchkoeffizienten werden durch eine Reihenentwicklung von $\sigma(z)$ bzw. $\sigma_i(z)$ und Einsetzen des entsprechenden Pols bestimmt:

$$\begin{aligned} A_l &= \left. \frac{\alpha(z)}{\sigma(z)} \right|_{z=p_0} \\ A_{l-1} &= \left. \frac{d}{dz} \frac{\alpha(z)}{\sigma(z)} \right|_{z=p_0} \\ A_1 &= \frac{1}{(l-1)!} \cdot \left. \frac{d^{(l-1)}}{dz^{(l-1)}} \frac{\alpha(z)}{\sigma(z)} \right|_{z=p_0} \\ B &= \left. \frac{\alpha(z)}{\gamma(z) \cdot \sigma_1(z)} \right|_{z=p_1} \\ Q &= \left. \frac{\alpha(z)}{\gamma(z) \cdot \sigma_{m-l}(z)} \right|_{z=p_{m-l}} \end{aligned}$$

Wir wenden diese Formeln auf unsere beiden Beispiele an:

Beispiel 1b:

$$\begin{aligned} \frac{H_1(z)}{z} &= \frac{z(z-1)}{(z - \frac{1}{2})^2 (z + \frac{1}{3})} \\ &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2} \cdot \left[\frac{z(z-1)}{z + \frac{1}{3}} \right]_{z=\frac{1}{2}} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{d}{dz} \frac{z(z-1)}{z + \frac{1}{3}} \right]_{z=\frac{1}{2}} + \frac{1}{z + \frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{z(z-1)}{(z - \frac{1}{2})^2} \right]_{z=-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{-\frac{3}{10}}{(z - \frac{1}{2})^2} + \frac{\frac{9}{25}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{16}{25}}{z + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Beispiel 2b:

$$\begin{aligned} \frac{H_2(z)}{z} &= \frac{2(z + \frac{1}{4})^2}{z(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{z} \left[\frac{2(z + \frac{1}{4})^2}{(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{2})} \right]_{z=0} + \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \left[\frac{2(z + \frac{1}{4})^2}{z(z + \frac{1}{2})} \right]_{z=\frac{1}{4}} + \frac{1}{z + \frac{1}{2}} \left[\frac{2(z + \frac{1}{4})^2}{z(z - \frac{1}{4})} \right]_{z=-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-1}{z} + \frac{\frac{8}{3}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{z + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Abschnitt 3: Rücktransformation

Wir formen die Partialbruch-Gleichung von Abschnitt 2 ein wenig um und multiplizieren beide Seiten mit z .

$$z \cdot \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = \frac{A_l}{p_0^{l-1}} \cdot \frac{p_0^{l-1} z}{(z-p_0)^l} + \frac{A_{l-1}}{p_0^{l-2}} \cdot \frac{p_0^{l-2} z}{(z-p_0)^{l-1}} + \dots + A_1 \cdot \frac{z}{z-p_0} + B \cdot \frac{z}{z-p_1} + \dots + Q \cdot \frac{z}{z-p_{m-l}}$$

In unserem Fall haben wir $H(z)$ schon *vor* der Partialbruchzerlegung durch z dividiert und als $\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ deklariert. Jetzt kommt uns dieser Schritt zu Gute, denn es gilt dann folglich gemäss unserer Notation: $H(z) = z \cdot \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$.

Falls ein *rechtsseitiges* zeitdiskretes Signal erwünscht ist, ergibt sich die Rücktransformation der Übertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} f[k] &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \cdot \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \right\} \\ &= \frac{A_l}{p_0^{l-1}} \cdot \binom{k}{l-1} \cdot p_0^k \cdot u[k - (l-1) + 1] + \frac{A_{l-1}}{p_0^{l-2}} \cdot \binom{k}{l-2} \cdot p_0^k \cdot u[k - (l-2) + 1] + \dots \\ &\quad \dots + \left(A_1 \cdot p_0^k + B \cdot p_1^k + \dots + Q \cdot p_{m-l}^k \right) \cdot u[k] \end{aligned}$$

Wird das *linksseitige* zeitdiskrete Signal gesucht, müssen alle Einheitsschrittfunktionen von $f[k]$ wie folgt ersetzt werden:

$$\underbrace{u[k+q]}_{\text{rechtsseitig}} \implies \underbrace{-u[-(k+q)-1]}_{\text{linksseitig}} \quad q \in \mathbf{Z}$$

Falls ein *stabiles* zeitdiskretes Signal gefordert wird, werden die konvergierenden Signalanteile aus dem rechtsseitigen und linksseitigen Signal zusammengefasst.

Beispiel 1c: Die Umformung von $H_1(z)$ ergibt:

$$H_1(z) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{9}{25} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{16}{25} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{3}}$$

Das rechtsseitige Signal im Zeitbereich lässt sich nun einfach bestimmen:

$$h_1[k] = \left(\left(-\frac{3}{5} \cdot k + \frac{9}{25} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k + \frac{16}{25} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right) \cdot u[k]$$

Beispiel 2c: Die Rücktransformation von $H_2(z)$ zu einem rechtsseitigen Signal ergibt:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= -1 + \frac{\frac{8}{3}z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}z}{z + \frac{1}{2}} \\ h_2[k] &= \mathcal{Z}^{-1} \{ H_2(z) \} = -\delta[k] + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k \cdot u[k] + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \cdot u[k] \end{aligned}$$

Nach diesen allgemeinen Ausführungen sei im folgenden eine Tabelle gegeben, welche die Partialbruchzerlegung von Übertragungsfunktionen mit Vielfachheit von bis zu zwei enthält. Die Erweiterung auf Drei- und Mehrfachpole kann den allgemeinen Formeln aus Abschnitt zwei entnommen werden.

<p>Sei</p> $\frac{H(z)}{z} = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} \quad , \text{ wobei } \beta(z) = \gamma(z) \cdot \sigma(z) .$ <p>Dabei ist</p> $\sigma(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) \quad (\text{Keine Mehrfachpole})$ <p>Weiter gilt</p> $\sigma_i(z) = \frac{1}{z - p_i} \cdot \sigma(z)$
<p><i>Fall 1:</i> $\gamma(z) = 1$</p> $H(z) = \frac{z}{z-p_1} \cdot \frac{\alpha(p_1)}{\sigma_1(p_1)} + \frac{z}{z-p_2} \cdot \frac{\alpha(p_2)}{\sigma_2(p_2)} + \dots + \frac{z}{z-p_n} \cdot \frac{\alpha(p_n)}{\sigma_n(p_n)}$
<p><i>Fall 2:</i> $\gamma(z) = z$</p> $H(z) = \frac{\alpha(0)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} + \frac{z}{z-p_1} \cdot \frac{\alpha(p_1)}{p_1 \cdot \sigma_1(p_1)} + \frac{z}{z-p_2} \cdot \frac{\alpha(p_2)}{p_2 \cdot \sigma_2(p_2)} + \dots + \frac{z}{z-p_n} \cdot \frac{\alpha(p_n)}{p_n \cdot \sigma_n(p_n)}$
<p><i>Fall 3:</i> $\gamma(z) = (z - p_0)^2$</p> $H(z) = \frac{z}{z-p_0} \cdot \left\{ \frac{d}{dz} \frac{\alpha(z)}{\sigma(z)} \right\} \Big _{z=p_0} + \frac{z}{(z-p_0)^2} \cdot \frac{\alpha(p_0)}{\sigma(p_0)} + \frac{z}{z-p_1} \cdot \frac{\alpha(p_1)}{\gamma(p_1) \cdot \sigma_1(p_1)} + \frac{z}{z-p_2} \cdot \frac{\alpha(p_2)}{\gamma(p_2) \cdot \sigma_2(p_2)} + \dots + \frac{z}{z-p_n} \cdot \frac{\alpha(p_n)}{\gamma(p_n) \cdot \sigma_n(p_n)}$

In *Fall 2* ist $\gamma(z)$ als Term mit einem *einfachen* Pol (im Ursprung) "missbraucht" worden. Er ist hier darum aufgeführt, weil er - durch die Division von $H(z)$ durch z - keine Seltenheit darstellt. Es sei aber an dieser Stelle betont, dass diese Division durch z nicht sakrosankt ist. Es kann auch darauf verzichtet werden, wenn die Bedingung aus Abschnitt 1 (Zählerpolynom-Grad kleiner Nennerpolynom-Grad) erfüllt ist. Es werden einfach anstatt die bequemen $\frac{z}{z-p_i}$ -Terme solche rücktransformiert, die eine Verschiebung im Zeitbereich zur Folge haben, nämlich $\frac{1}{z-p_i}$ -Terme. Das Endergebnis im Zeitbereich ist aber genau dasselbe. Von einer Division durch z ist sogar abzuraten, wenn sich ohnehin schon ein Pol im Ursprung befindet. Käme jetzt noch ein z hinzu, würde dieser Pol ein Doppelpol, der dann so behandelt werden müsste wie in *Fall 3* der obigen Tabelle, jedoch mit $p_0 = 0$.

Wörterbuch Deutsch-Englisch

Kapitel	Deutsch	Englisch
2.2	Wahrscheinlichkeitssystem	probability space
	Ergebnisraum	sample space
	Wahrscheinlichkeitsmass	probability measure
	Klasse der Ereignisse	class of events
2.3	Zufallsgrösse	random variable
	Erwartungswert	expectation, expected value
	Verteilungsfunktion	probability distribution function
	Wahrscheinlichkeitsdichte	probability density function
2.3	Mittelwert $E[X]$	mean
2.4	Verbundwahrscheinlichkeitsdichte	joint probability density function
2.5	stochastischer Prozess	stochastic process
3.2	Eindeutigkeitssatz	uniqueness theorem
3.4	Allg. Eigenschaften der z-Transformation	general properties of the z-transform
	Linearität	linearity
	Zeitverschiebung-Eigenschaft	time-shift property
	Frequenzskalierungs-Eigenschaft	frequency-scaling property
	"Multiplikation mit k"-Eigenschaft	"multiplication-by-k" property
	Zeitumkehrungs-Eigenschaft	time-reversal property
3.5	Anfangswert-Eigenschaft für kausale Signale	initial-value property for causal signals
3.5	Eigenschaft des kausalen Teils verschobener kausaler Signale	causal-part property of shifted causal signals
4.2	Faltung	convolution
4.4	Übertragungsfunktion	transfer function
	Frequenzgang	frequency response
5.2	stationär	stationary
	schwach stationär	weakly stationary, wide-sense stationary (wss)
	gemeinsam schwach stationär	jointly weakly stationary
	Autokorrelationsfunktion	autocorrelation function
	unabhängig und identisch verteilt	independent and identically distributed (i.i.d.)
	weisses Rauschen	white noise
	Kreuzkorrelationsfunktion	crosscorrelation function
5.5	spektrale Leistungsdichte	power spectral density
	spektrale Kreuzleistungsdichte	cross power spectral density

Kapitel	Deutsch	Englisch
6	abgetastetes Signal	sampled-data signal
	Zeitdiskretes Signal (Folge der Abtastwerte)	discrete-time signal
7	Lineare minimale mittlere Fehlerschätzung	linear minimum-mean-squared-error estimation (LMMSE)
	Schätzwert	estimate
7.5	Wiener Filterung	Wiener filtering
8.2	Multiplikationsregel	multiplication rule
8.3	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	Theorem of Total Probability
8.4	Bayes'sche Formel	Bayes' Rule
	Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgrößen X , unter der Bedingung, dass A eintritt	the conditional probability density function for the random variable X given that A occurs
	bedingter Erwartungswert von $f(X)$ unter der Bedingung, dass A eintritt	conditional expectation of $f(X)$ given that A occurs
	Das bedingte n -te Moment von X , unter der Bedingung, dass A eintritt	the conditional n -th moment of X given that A occurs
	Satz des totalen Erwartungswertes	Theorem of Total Expectation
8.5	bedingtes Wahrscheinlichkeitsmass unter der Bedingung, dass $Y = y$	conditional probability measure given that $Y = y$
	Integrale Form des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit	Integral Form of the Theorem of Total Probability
	bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgrösse X unter der Bedingung, dass $Y = y$	conditional probability density function for the random variable X given that $Y = y$
	Verbundwahrscheinlichkeitsdichte	joint probability density function
	Integrale Form des Satzes vom totalen Erwartungswert	Integral Form of the Theorem of Total Expectation
9	Entscheidungstheorie	Decision Theory
9.5	Wertebereich	range
	Invertierbarkeitsprinzip	Invertibility Principle
	additives weisses Gauss'sches Rauschen	AWGN - additive white Gaussian noise
	Zustandsmaschine	finite-state machine (FSM)
	Spalier	trellis
10	Schätzungstheorie	Estimation theory

Anhang E

Beweis des Cauchy-Hadamard Theorems über die Konvergenz von Potenzreihen (Kapitel 3)

Um das Cauchy-Hadamard Theorem zu beweisen, benötigen wir zwei Eigenschaften von Potenzreihen. Wir erinnern uns, dass man von einer Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ sagt, dass sie zur komplexen Zahl α *konvergiere*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \alpha$, wobei $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$, und dass man sonst von der Potenzreihe sagt, dass sie *divergiere*. Weil $A_{n+1} - A_n = a_{n+1}$, erhalten wir sofort die erste unserer zwei benötigten Eigenschaften:

- (i) Falls $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert, dann ist $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ (aber das Umgekehrte gilt im allgemeinen natürlich nicht).

Man erinnere sich, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ dann existiert, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass $|A_{n_0+m} - A_{n_0}| < \varepsilon$ für alle $m \geq 1$ und wir können

$$|A_{n_0+m} - A_{n_0}| = |a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+m}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots + |a_{n_0+m}|$$

schreiben, so dass wir unmittelbar unsere zweite Eigenschaft erhalten:

- (ii) Falls $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergiert (d.h. falls $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert), dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ (aber das Umgekehrte gilt im allgemeinen natürlich nicht).

Wir werden auch von den folgenden Eigenschaften Gebrauch machen, die direkt aus der Definition des "lim sup" folgen:

Falls $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ eine Folge von nicht-negativen reellen Zahlen ist und $\beta = \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i$ $0 < \beta < \infty$ befriedigt, dann gilt

- (iii) für jedes θ , $0 < \theta < 1$ gibt es unendlich viele Integerzahlen i , $1 \leq i < \infty$, so dass $\beta_i > \theta\beta$;

und

- (iv) für jedes $\theta > 1$ gibt es nur endlich viele Integerzahlen i , $1 \leq i < \infty$, so dass $\beta_i > \theta\beta$;

Nun sind wir bereit, das Cauchy-Hadamard Theorem zu beweisen. Man betrachte die komplexe Potenzreihe

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

und sei

$$\gamma = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|}.$$

Man nehme zuerst an, dass $0 < \gamma < +\infty$ (d.h. dass $\gamma \neq 0$ and $\gamma \neq +\infty$.) Sei x_0 eine beliebige komplexe Zahl mit $|x_0| > \frac{1}{\gamma}$, d.h.

$$|x_0| = (1 + \delta) \frac{1}{\gamma} \quad \text{mit } \delta > 0,$$

und man betrachte die komplexe Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} |c_i x_0^i| &= |c_i| |x_0|^i = \left(\sqrt[i]{|c_i|} \cdot |x_0| \right)^i \\ &= \left| (1 + \delta) \frac{\sqrt[i]{|c_i|}}{\gamma} \right|^i. \end{aligned}$$

Es folgt aus Eigenschaft (iii) von oben, dass $(1 + \delta) \sqrt[i]{|c_i|} > \gamma$ (oder gleichwertig $\sqrt[i]{|c_i|} > \frac{\gamma}{1 + \delta}$) für **unendlich** viele Werte von i gilt, und daher ist $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i x_0^i \neq 0$. Wegen obiger Eigenschaft (i) folgt, dass $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ divergiert.

Man nehme nun umgekehrt an, dass x_0 eine beliebige, von Null verschiedene, komplexe Zahl mit $|x_0| < \frac{1}{\gamma}$, d.h..

$$|x_0| = \frac{1}{1 + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma} \quad \text{mit } \delta > 0,$$

und man betrachte die komplexe Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} |c_i x_0^i| &= \left(\sqrt[i]{|c_i|} \cdot |x_0| \right)^i = \left| \frac{1}{1 + \delta} \cdot \frac{\sqrt[i]{|c_i|}}{\gamma} \right|^i \\ &= \left| \frac{1 + \delta/2}{1 + \delta} \cdot \frac{\sqrt[i]{|c_i|}}{\gamma} \right|^i \left(\frac{1}{1 + \delta/2} \right)^i. \end{aligned}$$

Es folgt aufgrund der Eigenschaft (iv) von oben, dass $\frac{1 + \delta/2}{1 + \delta} \sqrt[i]{|c_i|} > \gamma$ (oder gleichwertig $\sqrt[i]{|c_i|} > \frac{1 + \delta}{1 + \delta/2} \gamma$) für höchstens **endlich** viele Werte von i gilt, sagen wir für $i \in J$, wobei J eine endliche Menge von nicht-negativen Integerzahlen ist. Daher haben wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i x_0^i| \leq \sum_{i \in J} |c_i x_0^i| + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta/2)^i} = \sum_{i \in J} |c_i x_0^i| + \frac{2}{\delta} + 1.$$

Daraus schliessen wir, dass $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ absolut konvergiert und daher, durch die Eigenschaft (ii), auch konvergiert. Dies schliesst die Beweisführung ab, dass $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ divergiert, falls

$$|x_0| > \frac{1}{\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$$

und absolut konvergiert, falls

$$|x_0| < \frac{1}{\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|}},$$

falls $0 < \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|} < +\infty$, was das Wesentliche des Cauchy-Hadamard Theorem ist. Wir überlassen dem Leser die Aufgabe, den obigen Beweis so zu modifizieren, um zu zeigen, dass $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ absolut konvergiert für alle komplexen x_0 , falls $\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|} = 0$ und dass $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ divergiert für alle $x_0 \neq 0$, falls $\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|c_i|} = +\infty$.