

## Fachpraktikum Signalverarbeitung

**SV1: Aktive RC-Filter****1 Einführung**

In diesem Versuch wird ein aktives Filter aufgebaut und ausgemessen. Das Filter besteht aus Widerständen, Kondensatoren und einem Verstärker, es gehört also zur Klasse der aktiven RC-Filter. Anhand eines Tiefpasses zweiter Ordnung werden Eigenschaften wie das Verhalten im Frequenzbereich und im Zeitbereich untersucht. Die Versuchsschaltungen werden auf einem Steckbrett mit diskreten Bauteilen aufgebaut.

**2 Lineare Filter**

Meist werden elektrische Filter dazu verwendet, bestimmte Frequenzanteile eines Signals abzuschwächen. Unter diese frequenzselektiven Filter fallen zum Beispiel Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre. Alle diese Filter verändern auch den Phasengang des Signals. Dies ist aber für viele Anwendungen weniger relevant als die frequenzabhängige Änderung der Amplitude. Andererseits gibt es zum Beispiel die Allpassfilter, welche einen flachen Amplitudengang aufweisen und nur die Phase des Ausgangssignals beeinflussen.

**2.1 Übertragungsfunktion**

Die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion eines linearen Filters beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal:

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = T(s) \quad (1)$$

$T(s)$  ist eine rationale Funktion der komplexen Frequenz  $s = \sigma + j\omega$ . Zähler  $N(s)$  und Nenner  $D(s)$  von  $T(s)$  sind komplexe Polynome (2). Werden sie in Linearfaktoren zerlegt, erhält man die Pole  $p_i$  und Nullstellen  $z_i$  der Übertragungsfunktion (3).

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2)$$

$$T(s) = k \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3)$$

Wertet man  $T(s)$  entlang der imaginären Achse aus ( $s = j\omega$ ), erhält man den Frequenzgang  $T(j\omega)$ , welcher zerlegt werden kann in den Amplitudengang  $|T(j\omega)|$  und den Phasengang  $\phi(\omega)$ :

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}. \quad (4)$$

Die Gruppenlaufzeit  $\tau_g(\omega)$  ist ein Mass für die Änderung des Phasengangs:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}. \quad (5)$$

Anhand der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses zweiter Ordnung schauen wir uns die Bedeutung der Pole etwas genauer an. Nehmen wir an,  $T(s)$  habe ein komplexes Polpaar  $p, p^* = -\sigma_p \pm j\tilde{\omega}_p$ .  $T(s)$  lautet dann

$$T(s) = k \cdot \frac{\omega_p^2}{s^2 + 2\sigma_p s + \omega_p^2} = k \cdot \frac{\omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{q_p} s + \omega_p^2}. \quad (6)$$

Die Werte  $\sigma_p$  und  $\tilde{\omega}_p$  werden für die Darstellung der Pole in der komplexen  $s$ -Ebene gebraucht. Für den Entwurf von Filtern sind jedoch die Werte  $k$  (Verstärkung bei  $\omega = 0$ ),  $\omega_p$  (Polfrequenz) und  $q_p$  (Polgüte) nützlicher, da diese Grössen physikalisch messbar sind. Die Phasenverschiebung bei  $\omega = \omega_p$  ist genau  $90^\circ$ ; der Amplitudengang weist an dieser Stelle einen Wert von  $k \cdot q_p$  auf. Die Polgüte  $q_p$  ist also ein Mass für die Überhöhung des Amplitudengangs. Diese Beziehungen sind in Abbildung 1 illustriert.

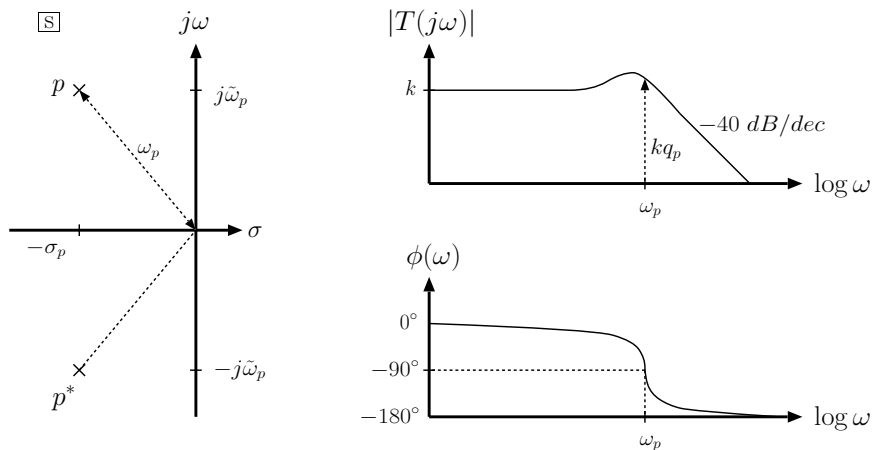


Abbildung 1: Pol-/Nullstellendiagramm eines Tiefpasses mit einem komplexen Polpaar mit dem dazugehörigen Amplituden- und Phasengang.

### 3 Filtertypen

Im Idealfall ist der Amplitudengang eines Filters rechteckig oder stufenförmig. Ausserdem wird häufig ein linearer Phasengang angestrebt. In der Praxis lassen sich diese beiden Eigenschaften allerdings nur annäherungsweise realisieren. Im folgenden sind die Merkmale von fünf populären Filtertypen beschrieben. Abbildung 2 zeigt die Amplitudengänge von verschiedenen Tiefpassen zweiter Ordnung.

- **Bessel Filter:** Glatter Amplitudengang mit geringer Steilheit (flacher als beim Butterworthfilter). Kaum Überschwingen der Sprungantwort. Der Phasengang kommt dem linearen Ideal am nächsten; die Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich ist weitgehend konstant. Auch genannt *linear phase filter*.
- **Butterworth Filter:** Linearer Amplitudengang im Durchlassbereich ("maximally flat"), glatter Amplitudengang im ganzen Frequenzband. Stellt einen Kompromiss dar zwischen Steilheit des Amplitudengangs im Sperrbereich und linearem Phasengang.

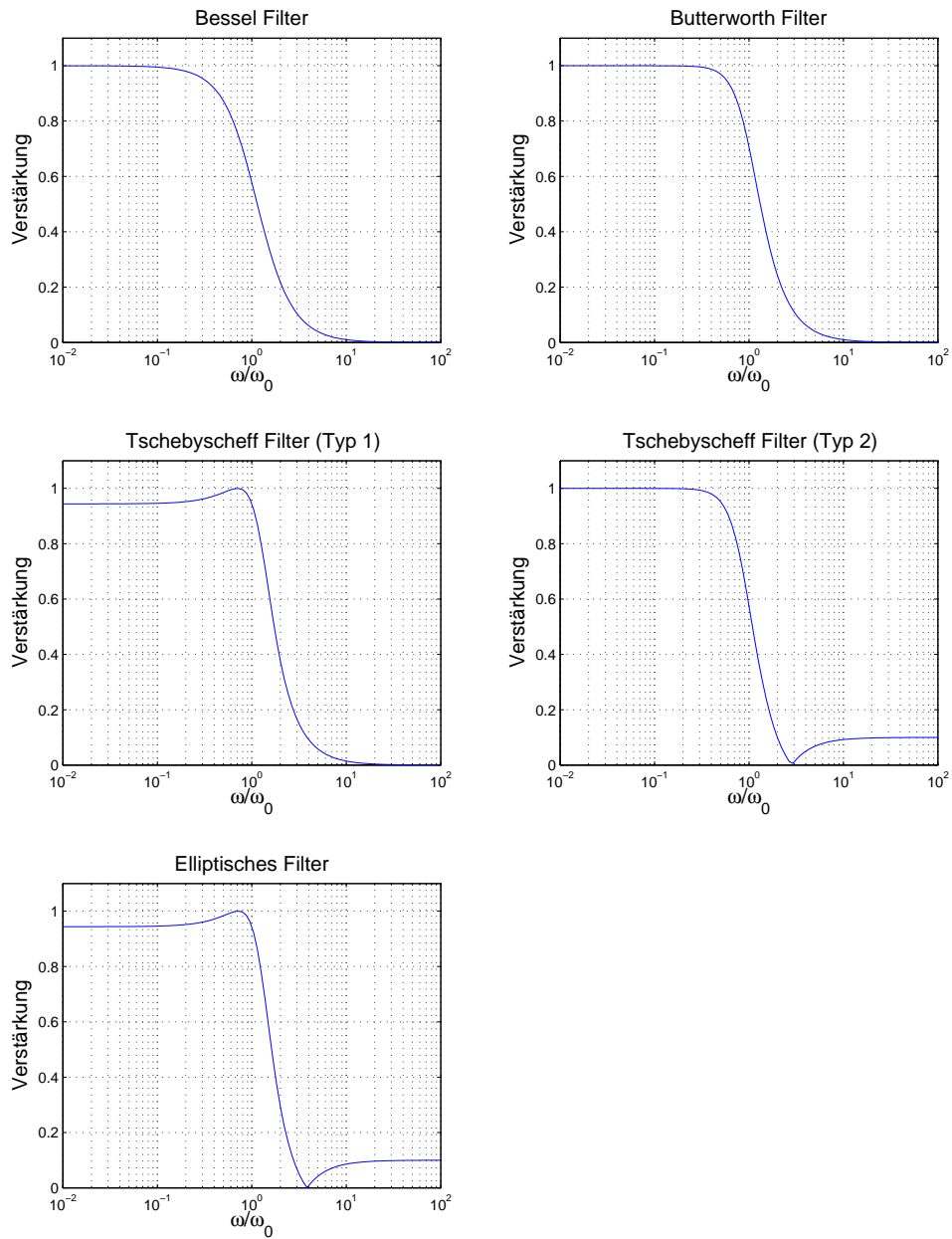


Abbildung 2: Amplitudengänge von fünf verschiedenen Filtertypen. Alle sind Tiefpässe zweiter Ordnung.

- **Tschebyscheff Filter (Typ 1):** Welliger Amplitudengang im Durchlassbereich (passband ripple), steiles Abknicken bei der Grenzfrequenz. Welliger Phasengang. Auch genannt *equiripple filter*.
- **Tschebyscheff Filter (Typ 2):** Welliger Amplitudengang im Sperrbereich (stopband ripple), steiles Abknicken bei der Grenzfrequenz. Welliger Phasengang. Auch genannt *inverse Chebyshev filter*, *inverse equiripple filter*.
- **Elliptische Filter:** Höchste Steilheit des Amplitudengangs für eine gegebene Filterordnung. Welliger Amplitudengang im Durchlass- und im Sperrbereich. Stark welliger Phasengang. Auch genannt *Chebyshev-Cauer filter*.

## 4 Aktive RC-Filter

Ursprünglich wurden elektrische Filter ausschliesslich aus Spulen und Kondensatoren (LC-Filter) aufgebaut. Theoretisch können damit Filter mit beliebig hohen Güten realisiert werden, da diese Elemente idealerweise verlustlos arbeiten. Auch aus Widerständen und Kondensatoren lassen sich Filter bauen. Die erreichbaren Güten sind aber, bedingt durch die Verluste in den Widerständen, sehr klein. Durch Hinzufügen eines aktiven Elements, zum Beispiel eines Operationsverstärkers, können diese Verluste kompensiert werden. Auf diese Weise sind Filter mit hohen Güten realisierbar.

### 4.1 RC-Filter zweiter Ordnung

Es gibt viele Möglichkeiten, aus Widerständen, Kondensatoren und Operationsverstärkern Filter aufzubauen. Die in diesem Versuch verwendeten Schaltungen werden Sallen-Key Filter oder auch *VCVS*<sup>1</sup> Filter genannt. Sie weisen einen einfachen positiven Rückkopplungspfad auf (Abbildung 3). Mit dieser Anordnung lassen sich Tiefpass- und Hochpassfilter realisieren. Die Schaltung eines Hochpasses ergibt sich aus dem Tiefpass nach Abbildung 3, wenn anstelle der Widerstände Kondensatoren eingesetzt werden und umgekehrt (für alle Elemente ausser  $R_5$  und  $R_6$ ). Abbildung 4 zeigt den so hergeleiteten Hochpass.

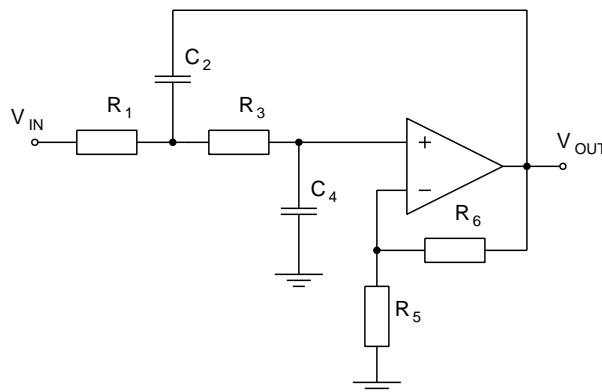


Abbildung 3: Aktives Tiefpassfilter zweiter Ordnung (*VCVS* Filter) mit einfacher positiver Rückkopplung.

<sup>1</sup>Der Operationsverstärker bildet mit den Widerständen  $R_5$  und  $R_6$  eine *Voltage Controlled Voltage Source*.

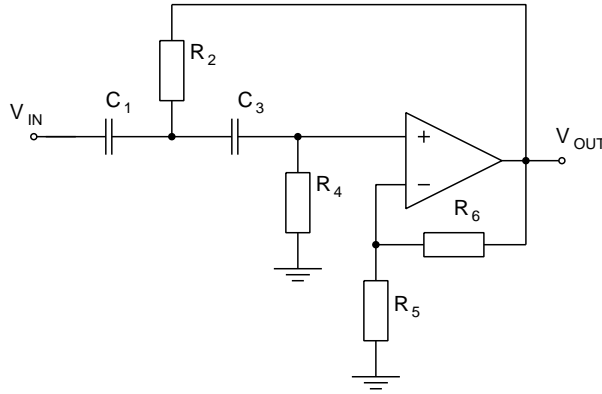


Abbildung 4: Aktives RC-Hochpassfilter zweiter Ordnung. Beachte die Dualität zum Tiefpassfilter in Abbildung 3.

## 4.2 Filterentwurf

Mit den gezeigten Schaltungen können unter anderem Filter mit Bessel-, Butterworth- oder Tschebyscheff-Charakteristik gebaut werden; inverse Tschebyscheff und elliptische Filter sind mit diesen Schaltungen nicht realisierbar, da sie zusätzlich Nullstellen brauchen. Die folgenden Gleichungen (*design equations*) werden für die Dimensionierung der Schaltungselemente in Abbildung 3 und 4 verwendet:

Tiefpass	Hochpass
$T(s) = k \cdot \frac{\omega_p^2}{s^2 + (\omega_p/q_p)s + \omega_p^2}$ $k = 1 + \frac{R_6}{R_5}$ $\omega_p^2 = \frac{1}{R_1 C_2 R_3 C_4}$ $q_p = \frac{\sqrt{R_3 C_2 / (R_1 C_4)}}{1 + R_3 / R_1 - R_6 C_2 / (R_5 C_4)}$	$T(s) = k \cdot \frac{s^2}{s^2 + (\omega_p/q_p)s + \omega_p^2}$ $k = 1 + \frac{R_6}{R_5}$ $\omega_p^2 = \frac{1}{C_1 R_2 C_3 R_4}$ $q_p = \frac{\sqrt{R_4 C_1 / (R_2 C_3)}}{1 + C_1 / C_3 - R_4 R_6 / (R_2 R_5)}$

## 4.3 Tuning der Filterparameter

Die Bauteilwerte sind sowohl bei diskret aufgebauten Schaltungen als auch bei integrierten Schaltungen beträchtlichen Toleranzen unterworfen. Deshalb ist es häufig notwendig, die Filterparameter nach der Produktion zu justieren (*tuning*). Bei den gezeigten Schaltungen lassen sich die Werte von  $\omega_p$  und  $q_p$  einstellen, indem Widerstandswerte getreu der folgenden Tabelle verändert werden:

Parameter	Tiefpass	Hochpass
① $\omega_p$	$R_3$	$R_2$ oder $R_4$
② $q_p$	$R_6$	$R_6$

Bei der Abstimmung wird jeweils zuerst  $\omega_p$  und danach  $q_p$  eingestellt.

## 5 Experimente

1. Richte deinen Arbeitsplatz ein, schliesse die Geräte an und mache dich mit den Instrumenten vertraut. Bitte wende dich bei Unklarheiten an die Assistentin oder den Assistenten.

2. Wir bauen ein aktives Butterworth-Tiefpassfilter zweiter Ordnung (siehe Abbildung 3) mit DC-Gain von 6 dB und Grenzfrequenz  $f_g = 1000 \text{ Hz}$ . Dies ergibt folgende Werte für die Filterparameter:  $k = 2$ ,  $\omega_p = 2\pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1}$  und  $q_p = \sqrt{2}/2$ . Nun müssen die Werte der Widerstände und Kondensatoren festgelegt werden. Gegeben sind  $R_6$ ,  $C_2$  und  $C_4$ . Berechne  $R_5$ ,  $R_1$  und  $R_3$ .

$R_6 = 10 \text{ k}\Omega$	$R_5 =$
$C_2 = 10 \text{ nF}$	$R_1 =$
$C_4 = 15 \text{ nF}$	$R_3 =$

3. Baue die Filterschaltung auf dem Steckbrett auf. Dazu ein praktischer Ratschlag: Orientiere dich beim Platzieren der Bauelemente am Schaltplan (Abbildung 3), das erhöht die Übersichtlichkeit. Die Pinbelegung des Operationsverstärkers TL072 ist in Abbildung 5 gezeigt. Verwende eine Versorgungsspannung von  $\pm 15 \text{ V}$ .
4. Messe den Frequenzgang. Versuche,  $f_g$  und  $q_p$  möglichst genau zu bestimmen. Hinweis: bei  $f = f_g = f_p$  beträgt die Phasendrehung genau  $90^\circ$ . Stimmen die Messergebnisse mit dem erwarteten Frequenzgang überein?
5. Setze anstelle der Widerstände  $R_3$  und  $R_6$  Potentiometer ein, damit Du die Werte von  $\omega_p$  und  $q_p$  einstellen kannst. Beobachte den Frequenzgang bei verschiedenen Einstellungen.
6. Untersuche, wie sich die Schaltung im Zeitbereich verhält: Schau dir die Sprungantwort bei verschiedenen Werten von  $q_p$  ( $R_6$ ) an. Gib dazu ein Rechtecksignal auf den Eingang.
7. Die Schaltung lässt sich leicht in einen Hochpass transformieren, indem die Widerstände durch Kondensatoren ersetzt werden und umgekehrt ( $R_5$  und  $R_6$  sind davon ausgenommen). Abbildung 4 zeigt die Schaltung. Messe den Frequenzgang des Hochpasses und variiere  $\omega_p$  und  $q_p$ .

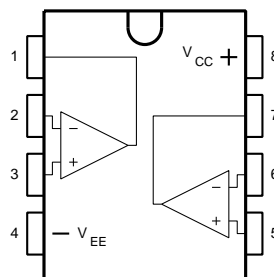


Abbildung 5: Pinbelegung des Operationsverstärkers TL072 (Ansicht von oben).

## 6 Materialliste

- Funktionsgenerator, Oszilloskop, Multimeter
- Zubehör: BNC-Kabel, Tastköpfe, Laborkabel, Werkzeug, Drahtrolle
- Steckbrett, Bauteile: Widerstände  $7.5 \text{ k}\Omega$ ,  $2 \times 10 \text{ k}\Omega$ ,  $22 \text{ k}\Omega$ ; Trimmer  $2 \times 20 \text{ k}\Omega$ ; Kondensatoren  $10 \text{ nF}$ ,  $15 \text{ nF}$ ; Operationsverstärker TL072