

SV3: Switched-Capacitor Filter

1 Einführung

Switched-Capacitor-Filter (SC-Filter) sind aus Schaltern, Kondensatoren und Verstärkern aufgebaut. In diesem Versuch werden wichtige Eigenschaften von SC-Netzwerken erklärt und in Experimenten veranschaulicht. Dazu wird gezeigt, wie ein entsprechendes Filter mit Widerständen, Kondensatoren und Verstärkern (aktives RC-Filter) aufgebaut und daraus ein SC-Filter abgeleitet werden kann. Der Versuchsaufbau erlaubt eine direkte Gegenüberstellung der beiden Filtertypen.

2 Aktive RC-Filter

Ursprünglich wurden elektrische Filter ausschliesslich aus Spulen und Kondensatoren (LC-Filter) aufgebaut. Theoretisch können damit Filter mit beliebig hohen Güten realisiert werden, da diese Elemente idealerweise verlustlos arbeiten. Auch aus Widerständen und Kondensatoren lassen sich Filter bauen. Die erreichbaren Güten sind aber, bedingt durch die Verluste in den Widerständen, sehr klein. Durch Hinzufügen eines aktiven Elements, zum Beispiel eines Operationsverstärkers, können diese Verluste kompensiert werden. Auf diese Weise sind Filter mit hohen Güten realisierbar.

2.1 RC-Tiefpassfilter zweiter Ordnung

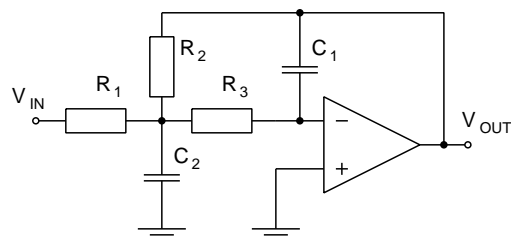


Abbildung 1: Aktives RC-Tiefpassfilter zweiter Ordnung nach Sallen und Key.

Die Schaltungen nach Sallen und Key gehören zu den gebräuchlichsten Ausführungen von aktiven RC-Filtern. Abbildung 1 zeigt die Schaltung eines solchen Tiefpasses zweiter Ordnung. Damit lässt sich ein komplexes Polpaar realisieren. Die folgende Gleichung

beschreibt die Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = -\frac{\frac{1}{R_1 R_3}}{s^2 C_1 C_2 + s C_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{R_2 R_3}} \quad (1)$$

$$= -\frac{\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{C_2 R_1 R_2 R_3} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (2)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Übertragungsfunktion eines allgemeinen Tiefpasses zweiter Ordnung (3), lassen sich die Werte der Bauteile in Zusammenhang bringen mit den Werten von ω_p , q_p und k .

$$T(s) = k \cdot \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (3)$$

Dabei bezeichnet ω_p die Polfrequenz, q_p die Polgüte und k die Gleichspannungsverstärkung des Filters.

3 SC-Filter

SC-Filter bestehen im Gegensatz zu RC-Filtern nicht aus einem RC-Netzwerk mit Operationsverstärker, sondern aus Schaltern, Kondensatoren und Verstärkern. Der Verzicht auf Widerstände prädestiniert die SC-Technik für integrierte Schaltungen (ICs), da sich Widerstände schlecht integrieren lassen, denn sie benötigen viel Platz und ihre Widerstandswerte sind ungenau (Abweichung vom Nominalwert bis 20%). Im folgenden Abschnitt wird eine SC-Schaltung gezeigt, die sich wie ein ohmscher Widerstand verhält.

3.1 Switched Capacitor

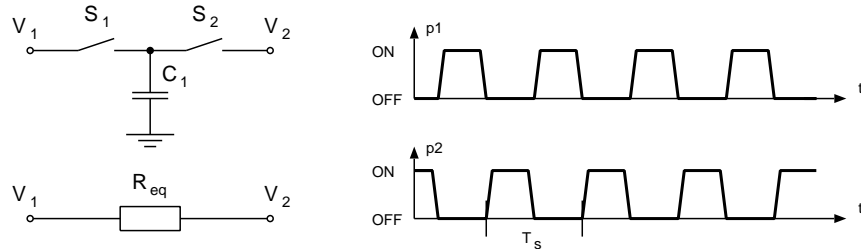


Abbildung 2: Switched Capacitor Schaltung mit dem äquivalenten Widerstand R_{eq} . Daneben die Steuersignale p_1 und p_2 für die Schalter S_1 bzw. S_2 .

Abbildung 2 zeigt eine Anordnung von Schaltern und einem Kondensator, die sich im Mittel wie ein ohmscher Widerstand verhält. Die Schalter werden von zwei Steuersignalen mit der Frequenz f_s (Periode $T_s = 1/f_s$) angesteuert. Die zwei Rechtecksignale sind um genau 180° verschoben und nie gemeinsam high (sogenannte non-overlapping clocks), so dass die Schalter immer abwechselnd offen oder geschlossen sind.

Das Verhalten dieser Schaltung lässt sich am besten anhand der Ladung Q des Kondensators beschreiben. Im Anfangszustand sei S_1 geschlossen und S_2 offen. C_1 ist auf V_1 aufgeladen, trägt also die Ladung $Q_1 = C_1 V_1$. In der darauf folgenden Clockphase ist S_1 offen und S_2 geschlossen, die Ladung beträgt also $Q_2 = C_1 V_2$. Die Ladungsmenge, die innerhalb einer Periode von V_1 nach V_2 transportiert wird, ist somit $\Delta Q = C_1 (V_1 - V_2)$. Da sich dieser Ladungstransport f_s mal pro Sekunde wiederholt, ergibt sich im Mittel ein

Stromfluss von V_1 nach V_2 . Dieser Strom ist identisch mit dem Ladungsaustausch in Coulombs pro Sekunde: $I_{avg} = \Delta Q/T_s$. Nun definieren wir einen äquivalenten Widerstand R_{eq} zwischen V_1 und V_2 (Abbildung 2). Durch R_{eq} fließt der Strom $I_{eq} = (V_1 - V_2)/R_{eq}$. Setzen wir $I_{eq} = I_{avg}$, erhalten wir den äquivalenten Widerstand der SC-Schaltung:

$$R_{eq} = T_s/C_1 \quad (4)$$

Auf diese Weise lassen sich auf einer integrierten Schaltung auch grosse Widerstandswerte platzsparend realisieren.

Ein Nachteil der Schaltung in Abbildung 2 ist ihre Empfindlichkeit für parasitäre Kapazitäten. Diese unerwünschten, schwer zu kontrollierenden und zum Teil nichtlinearen Kapazitäten treten in ICs unvermeidlich auf. So weist zum Beispiel der Kondensator C_1 neben der Hauptkapazität auch eine parasitäre Kapazität gegen Masse auf, welche stark abhängig ist vom Layout des ICs sowie vom Herstellungsprozess. In Abbildung 3 ist eine Switched Capacitor Schaltung gezeigt, die unempfindlich ist für parasitäre Kapazitäten (sogenannt parasitic-insensitive).

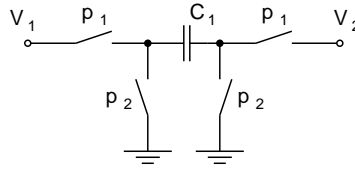


Abbildung 3: Switched Capacitor Schaltung, die unempfindlich ist für parasitäre Kapazitäten. p_1 und p_2 bezeichnen die Steuersignale der jeweiligen Schalter.

3.2 SC-Integrator

Mit der Switched Capacitor Schaltung als Ersatz für einen Widerstand können wir aus einem zeitkontinuierlichen RC-Integrator einen SC-Integrator konstruieren. R_1 wird dazu einfach durch den Switched Capacitor ersetzt. Beide Schaltungen sind in Abbildung 4 gezeigt.

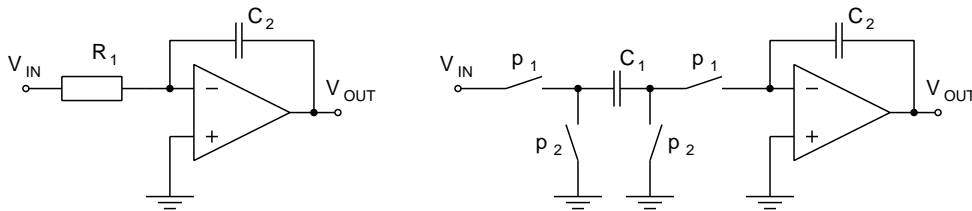


Abbildung 4: Zeitkontinuierlicher invertierender RC-Integrator und daraus hergeleiteter zeitdiskreter SC-Integrator.

Die Übertragungsfunktion $T(s)$ des RC-Integrators ist wohl bekannt:

$$T(s) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = -\frac{1}{sR_1C_2} \quad (5)$$

Für die Analyse des zeitdiskreten SC-Integrators eignet sich die z -Transformation. Die Übertragungsfunktion $T(z)$ lässt sich berechnen, indem der Zustand der Schaltung in beiden Phasen des Taktsignals berechnet wird.

- **Phase 1:** C_1 wird auf V_{IN} aufgeladen, die Ladungsmenge beträgt also $Q_1 = V_{IN}C_1$. Der Operationsverstärker sorgt dafür, dass die gleiche Ladungsmenge auch in C_2 akkumuliert wird¹.
- **Phase 2:** C_1 wird über die Schalter kurzgeschlossen. Somit ist $Q_1 = 0$ am Ende von Phase 2.

Die Ladung Q_2 auf dem Kondensator C_2 beträgt also zum Zeitpunkt $n = kT_s, k \in \mathbb{Z}$

$$Q_2[n] = Q_2[n-1] + Q_1[n]. \quad (6)$$

Einsetzen von $Q_1 = V_{IN} \cdot C_1$ und $Q_2 = -V_{OUT} \cdot C_2$ ergibt

$$-V_{OUT}[n] \cdot C_2 = -V_{OUT}[n-1] \cdot C_2 + V_{IN}[n] \cdot C_1. \quad (7)$$

Da wir bereits mit diskreten Zeitpunkten rechnen, fällt der Übergang in den z -Bereich besonders leicht:

$$-V_{OUT}(z) \cdot C_2 = -V_{OUT}(z) \cdot C_2 \cdot z^{-1} + V_{IN}(z) \cdot C_1. \quad (8)$$

Die Übertragungsfunktion $T(z) = \frac{V_{OUT}(z)}{V_{IN}(z)}$ ist

$$T(z) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (9)$$

Dies ist die Charakteristik eines invertierenden Integrators ohne Verzögerung vom Eingang zum Ausgang. Mit der gleichen Schaltung lässt sich auch ein nichtinvertierender Integrator mit Verzögerung realisieren, indem die Schalter anders angesteuert werden.

3.3 SC-Tiefpassfilter zweiter Ordnung

Ausgehend von der Schaltung des aktiven RC-Filters kann man sich ein SC-Tiefpassfilter bauen, indem die Widerstände durch Switched Capacitors ersetzt werden (Abbildung 5). Solange die Signalfrequenzen viel tiefer sind als die Taktfrequenz f_s , stimmt die Übertragungsfunktion des SC-Filters mit der des RC-Filters überein, wenn die Kondensatoren nach der Gleichung $C = T_s/R_{eq}$ bemessen werden. Normalerweise werden die Filter jedoch im zeitdiskreten z -Bereich entworfen.

4 Eigenschaften von SC-Filtern

- **Genauigkeit:** Die Übertragungsfunktion eines SC-Filters hängt nur von Kapazitätsverhältnissen und der Taktfrequenz f_s ab. Da jedoch die Taktfrequenz ohne grossen Aufwand mit einer Genauigkeit von einigen 10 *ppm* (parts per million) erzeugt werden kann, ist die Genauigkeit des Filters im wesentlichen von der Reproduzierbarkeit der C-Verhältnisse abhängig. Kapazitätsverhältnisse können im Gegensatz zu absoluten Kapazitätswerten mit hoher Genauigkeit (Größenordnung 0.1%) in integrierten Schaltungen realisiert werden. Das hat zur Folge, dass auch bei hochgenauen Filtern das Abstimmen entfällt.
- **Kleine Temperaturabhängigkeit:** Bei einer integrierten Schaltung sind die Temperaturkoeffizienten aller Kondensatoren annähernd gleich. Die Übertragungsfunktion, welche ja nur von den Kapazitätsverhältnissen abhängt, ist demnach praktisch temperaturunabhängig.

¹Dies lässt sich mit dem "Prinzip der virtuellen Masse" bei Operationsverstärkern erklären: Der OpAmp zwingt durch das Feedback-Netzwerk die Spannung an seinem negativen Eingang auf Null. Der Eingang nimmt aber keinen Strom auf, weshalb die ganze Ladung von C_1 in C_2 hineinfließen muss.

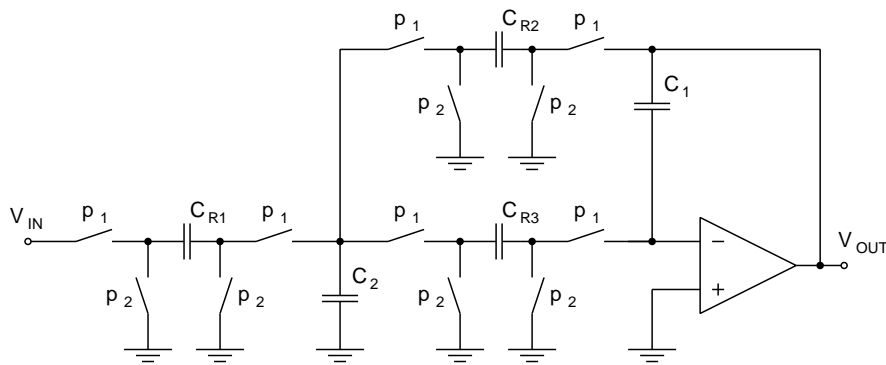


Abbildung 5: SC-Tiefpassfilter zweiter Ordnung. Die Struktur der Schaltung entspricht der eines RC-Filters nach Sallen und Key (siehe Abbildung 1), wobei die Widerstände durch Switched Capacitors ersetzt wurden.

- **Realisierbarkeit als IC:** Die benötigten Bauelemente (Schalter, Kondensatoren und Verstärker) sind sehr gut in MOS-Technologie realisierbar. Insbesondere brauchen die SC-Widerstände viel weniger Platz als entsprechende MOS-Widerstände.
- **Aliasing:** SC-Filter sind zeitdiskrete Filter (jedoch mit kontinuierlicher Amplitude!), das heisst, es werden abgetastete Signale verarbeitet. Nach dem Abtasttheorem darf das Eingangssignal keine Komponenten mit Frequenzen höher als $f_s/2$ aufweisen, da diese Signalanteile sonst in tiefere Frequenzbänder zurückgefaltet werden (Aliasing) und somit das Nutzsignal verzerren. Um Aliasing zu verhindern, muss dem SC-Filter ein sogenanntes Anti-Aliasingfilter vorgeschaltet werden. Man verwendet dazu einen zeitkontinuierlichen Tiefpass, dessen Grenzfrequenz tiefer als $f_s/2$ ist. Da ein Anti-Aliasingfilter relativ geringe Anforderungen an die Genauigkeit erfüllen muss, kann dafür beispielsweise ein aktives RC-Filter zur Anwendung kommen.
- **Dynamik:** Das Rauschen eines SC-Filters wird hauptsächlich durch die Verstärker und die MOS-Schalter verursacht. Ein weiterer Effekt verringert die Dynamik: Das Einkoppeln der Steuersignale der Schalter auf das Nutzsignal (genannt clockfeed-through). Während mit aktiven RC-Filtern eine Dynamik von etwa $80 \dots 120 \text{ dB}$ erreicht werden kann, liegt sie bei SC-Filtern im Bereich von $50 \dots 90 \text{ dB}$.
- **Leistungsbedarf:** Durch die Integration in MOS-Technologie kann der Stromverbrauch eines SC-Filters niedrig gehalten werden.
- **Frequenzbereich:** Die Grenzfrequenzen von SC-Filtern liegen typischerweise im Bereich von $0.1 \text{ Hz} \dots 10 \text{ MHz}$. Das liegt deutlich unter den Möglichkeiten der RC-Filter.

5 Anleitung für die Experimente

1. Richte deinen Arbeitsplatz ein, schliesse die Geräte an und mache dich mit den Instrumenten vertraut. Bitte wende dich bei Unklarheiten an die Assistentin oder den Assistenten.
2. Wir betrachten ein aktives Tiefpassfilter zweiter Ordnung mit einem Frequenzgang nach Tschebyscheff (3 dB Welligkeit im Durchlassbereich) und einer Grenzfrequenz von 1000 Hz . Dies ergibt folgende Werte für die Parameter der Übertragungsfunktion (3):

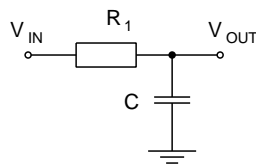
$k = 1$	$\omega_p = 2\pi \cdot 840 \text{ s}^{-1}$	$q_p = 1.3$
---------	--	-------------

Skizziere den Amplitudengang und den Phasenverlauf dieses Filters! Überlege dir dazu folgendes: Wie gross ist $|T(j\omega)|$ für $\omega = 0$ und $\omega = \omega_p$? Wie gross ist die Phase bei $\omega = \omega_p$?

Diesen Frequenzgang werden wir mit der Versuchsschaltung realisieren. Die passiven Bauteile haben folgende Werte:

$$C_1 = 1 \text{ nF}, \quad C_2 = 15 \text{ nF}, \quad R_1 = R_2 = 51 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 47 \text{ k}\Omega.$$

3. Messe den Widerstandswert des SC-Netzwerks, welches R_1 simuliert, bei einer Taktfrequenz von $f_s = 15 \text{ kHz}$ (das Taktsignal wird intern generiert!). Wie ändert sich der Widerstand, wenn f_s auf 30 kHz erhöht wird?
4. Baue mit der Versuchsbox einen einfachen Tiefpass auf, wie in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Setze für R_1 einen ohmschen Widerstand oder einen SC-Widerstand ein und überprüfe die Schaltung in beiden Fällen mit dem Oszilloskop.



5. Schalte nun die Baugruppen zum Tiefpass nach Abbildung 1 zusammen. Messe und skizziere den Amplitudengang des aktiven RC-Filters an folgenden Frequenzpunkten: 100, 200, 500, 800, 900, 1000, 1100, 1200, 2000, 5000, 10000, 20000 Hz.
6. Gleiche die Taktfrequenz f_s so ab, dass das RC- und das SC-Filter bei $f_{IN} = 1 \text{ kHz}$ die gleiche Verstärkung aufweisen. Messe dann den Amplitudengang des SC-Filters und vergleiche ihn mit demjenigen des RC-Filters. Wo gibt es die grössten Abweichungen?
7. Betrachte das Ausgangssignal des SC-Filters mit einem Eingangssignal, dessen Frequenz in der Nähe von f_s liegt. Wie erklärst du dir die Beobachtung?
8. Wie verändert sich der Amplitudengang und insbesondere die Grenzfrequenz, wenn die Taktfrequenz f_s verändert wird? Entspricht der Effekt deinen Erwartungen?
9. Erfinde selber interessante Experimente und spiele mit den Geräten.

6 Materialliste

- Netzgerät $\pm 15 \text{ V}$, Funktionsgenerator, Oszilloskop, Multimeter
- Zubehör: BNC-Kabel, Tastköpfe, Laborkabel (*kurze* und *mittlere*)
- Box mit Versuchsschaltung